

TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI

Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická



DIPLOMOVÁ PRÁCE

Technická univerzita v Liberci

FAKULTA PŘÍRODOVĚDNĚ-HUMANITNÍ A PEDAGOGICKÁ

Katedra: matematiky a didaktiky matematiky

Studijní program: 3. stupeň

**Studijní obor
(kombinace):** matematika a fyzika

Objemy těles v E_n

Volumes of solids in E_n

Diplomová práce: 09–FP–KMD–009

Autor:

Martina ADAMCOVÁ

Podpis:

Adresa:

Liberecká 177

471 25, Jablonné v Podještědí

Vedoucí práce: RNDr. Daniela Bittnerová, Csc.

Počet:

| stran | slov | obrázků | tabulek | pramenů | příloh |
|-------|------|---------|---------|---------|--------|
| 60 | 4309 | 27 | 0 | 7 | 0 |

V Liberci dne: 19.5.2009

TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI

FAKULTA PŘÍRODOVĚDNĚ-HUMANITNÍ A PEDAGOGICKÁ

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(pro magisterský studijní program)

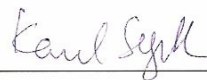
pro (diplomant): **Martina Adamcová**
adresa: **Liberecká 177, 471 25 Jablonné v Podještědí**
studijní obor (kombinace): **MA pro 3. st.**
Název DP: **Objemy těles v E_n**
Název DP v angličtině: **Volumes of solids in E_n**
Vedoucí práce: **RNDr. Daniela Bittnerová, CSc.**
Konzultant:
Termín odevzdání: **prosinec 2009**

Poznámka: Podmínky pro zadání práce jsou k nahlédnutí na katedrách. Katedry rovněž formulují podrobnosti zadání. Zásady pro zpracování DP jsou k dispozici ve dvou verzích (stručné, resp. metodické pokyny) na katedrách a na Děkanátě Fakulty přírodovědně-humanitní a pedagogické TU v Liberci.

V Liberci dne 29. 5. 2008



děkan

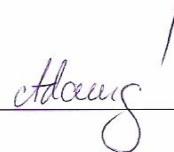


vedoucí katedry

Převzal (diplomant): _____

Datum: _____

Podpis: _____



Název diplomové práce:

Objemy těles v E_n .

(Volumes of Solids in E_n .)

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Daniela Bittnerová, CSc.

Úvod:

V této práci půjde o jiný pohled na řešení známé problematiky výpočtu obsahů a objemů uzavřených omezených útvarů. Student se seznámí s novou, ve škole neprobíranou teorií.

Cíl:

Nastudovat teorii výpočtu obsahů uzavřených omezených útvarů v E_n .

Najít vhodné parametrizace alespoň pěti útvarů v E_2 a pěti útvarů v E_3 .

Použít tyto parametrizace k výpočtu vhodných obsahů a objemů.

Požadavky:

Znalosti základního kursu matematické analýzy na VŠ. Schopnost studovat anglické odborné texty, ovládat textový editor.

Literatura:

- BITTNEROVÁ, D. *Obsahy těles pomocí parametrizace jejich povrchů*. XXII International Colloquium on the Acquisition Process Management (May 04). [CD-ROM]. Vyškov : VVŠ PV, 2004 [cit. 2004-05-20]. Address: 6clanky/1bittnerovad.pdf. ISBN 80-7231-116-6.
- BITTNEROVÁ, D. *Volumes of Bounded Closed Solids by Using Parametric Descriptions*. Mathematica. Ružomberok: 2005, Catholic University in Ružomberok. XIth Slovak-Czech-Polish Mathematical School . ISBN 80-8084-004-0, str. 19-24.
- EKELAND, I. – TEMAM, R. *Convex Analysis and Variational Problems*. Amsterdam, Oxford: 1976, North-Holland Publishing Company. ISBN 0 7204 28386. 401 p.
- HUGGETT, S. – JORDAN, D. *A Topological Aperitif*. Londýn: 2001, Springer-Verlang. ISBN 1-85233-377-4. 166 p.
- NOŽIČKA, F. – GRYGAROVÁ, L. – LOMMATZSCH, K. *Geometrie konvexer Mengen und konvexe Analysis*. Berlin: 1988, Akademie-Verlag. ISBN 3-05-500335-7. 424 p.

Prohlášení

Byl(a) jsem seznámen(a) s tím, že na mou diplomovou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, zejména § 60 – školní dílo.

Beru na vědomí, že Technická univerzita v Liberci (TUL) nezasahuje do mých autorských práv užitím mé diplomové práce pro vnitřní potřebu TUL.

Užiji-li diplomovou práci nebo poskytnu-li licenci k jejímu využití, jsem si vědom povinnosti informovat o této skutečnosti TUL; v tomto případě má TUL právo ode mne požadovat úhradu nákladů, které vynaložila na vytvoření díla, až do jejich skutečné výše.

Diplomovou práci jsem vypracoval(a) samostatně s použitím uvedené literatury a na základě konzultací s vedoucím diplomové práce a konzultantem.

V Liberci dne: 19.5.2009

Martina Adamcová

.....

Poděkování

V první řadě bych chtěla poděkovat paní RNDr. Daniele Bittnerové, Csc., vedoucí mé diplomové práce, za odborný dohled, pomoc a velice laskavý přístup.

Velký dík patří i mému příteli, Lukáši Borůvkovi, za velkou psychickou podporu v těžkých chvílích, ale také za poskytnutí nezbytného matematického softwaru pro vlastní tvorbu obrázků a kontrolu matematických výpočtů.

Samozřejmě děkuji i mým rodičům, kteří mě vychovali s láskou, byli ve všem mou oporou a poskytli mi materiální zabezpečení při studiu na vysoké škole.

Chtěla bych také touto cestou poděkovat všem členům Katedry matematiky a didaktiky matematiky, kteří mi v době vážné nemoci při studiu na vysoké škole pomohli a usnadnili samostudium.

Objemy těles v E_n

ADAMCOVÁ Martina

DP-2009

Vedoucí DP: RNDr. Daniela Bittnerová, Csc.

Resumé

Diplomová práce se věnuje nové metodě výpočtů objemů těles v n -rozměrném euklidovském prostoru s užitím parametrického popisu. Jejím cílem je vyzdvížení výhod popřípadě nevýhod užití dané metody. K této problematice je v úvodní části popsána parametrizace vybraných rovinných křivek v E_2 a ploch v E_3 , které jsou nezbytné pro následující výpočty. V závěrečné části lze procvičit novou metodu v souboru řešených příkladů.

Klíčová slova: n -rozměrný euklidovský prostor, rovinné křivky v E_2 , plochy v E_3 , parametrické rovnice, objemy těles

Volumes of solids in E_n

Summary

Diploma thesis devotes to a new design methods of volumes of solids in n -dimensional Euclidean space with applications parametric description. The aim of the project is to highlight advantages eventually disadvantages with applications assigned method. The introductory part of the diploma thesis is focused on parametric description of exclude plane curves in E_2 and surfaces in E_3 . The assigned theory is essential to the following calculations. In the final part of the project it is possible exercise in the new method in the collection of calculations.

Keywords: n -dimensional Euclidean space, plane curves in E_2 , surfaces in E_3 , parametric equations, volume of solids

Volumina der Körper in E_n

Zusammenfassung

Diese Diplomarbeit widmet sich einer neuen Berechnungsmethode der Volumina der Körper in n -dimensionalem euklidischem Raum mit der Benutzung parametrischer Beschreibung. Ziel dieser Diplomarbeit ist die Vorteile eventuell die Nachteile bei der Benutzung obwaltender Methode hervorheben. Einleitungs Teil der Arbeit konzentriert sich auf parametrische Beschreibung ausgewählter flachliegender Kurven in E_2 und ausgewählter Flächen in E_3 , die sind nötig für nächste Berechnungen. Im Schlußteil der Arbeit kann man neue Methode in der Kollektion mit gelösten Beispielen durchüben.

Schlüsselwörter: n -dimensionaler euklidischer Raum, flachliegende Kurven in E_2 , Fläche in E_3 , Parametergleichungen, Volumina der Körper

Obsah

| | |
|--|---------------|
| ÚVOD | - 9 - |
| 1. PARAMETRIZACE | - 10 - |
| 1.1. ROVINNÉ KŘIVKY V E_2 | - 10 - |
| 1.2. PŘÍKLADY ROVINNÝCH KŘIVEK V E_2 A JEJICH PARAMETRICKÉ VYJÁDŘENÍ | - 11 - |
| 1.2.1. <i>Kružnice</i> | - 11 - |
| 1.2.2. <i>Elipsa</i> | - 12 - |
| 1.2.3. <i>Parabola</i> | - 13 - |
| 1.2.4. <i>Hyperbola</i> | - 14 - |
| 1.2.5. <i>Cyklické křivky</i> | - 15 - |
| Prostá cykloida | - 15 - |
| Zkrácená cykloida | - 16 - |
| Prodloužená cykloida | - 17 - |
| Kardioida | - 18 - |
| Nefroida | - 19 - |
| Asteroidea | - 20 - |
| 1.2.6. <i>Bernoulliova lemniskáta</i> | - 21 - |
| 1.2.7. <i>Descartesův list</i> | - 22 - |
| 1.2.8. <i>Strofoida</i> | - 23 - |
| 1.3. PLOCHY V E_3 | - 24 - |
| 1.4. PŘÍKLADY PLOCH V E_3 A JEJICH PARAMETRICKÉ VYJÁDŘENÍ | - 25 - |
| 1.4.1. <i>Kulová plocha</i> | - 25 - |
| 1.4.2. <i>Válcová plocha</i> | - 26 - |
| 1.4.3. <i>Kuželová plocha</i> | - 27 - |
| 1.4.4. <i>Elipsoid</i> | - 28 - |
| 1.4.5. <i>Paraboloid</i> | - 29 - |
| Eliptický paraboloid | - 29 - |
| Hyperbolický paraboloid | - 30 - |
| 1.4.6. <i>Hyperboloid</i> | - 31 - |
| Rotační jednodílný hyperboloid | - 31 - |
| Rotační dvoudílný hyperboloid | - 32 - |
| 1.4.7. <i>Anuloid</i> | - 33 - |

| | |
|---|---------------|
| 2. OBJEMY OMEZENÝCH UZAVŘENÝCH TĚLES S UŽITÍM PARAMETRICKÉHO POPISU V E_N | - 34 - |
| 2.1. ÚVOD | - 34 - |
| 2.2. HLAVNÍ PODMÍNKY A ZAVEDENÍ SYMBOLIKY | - 34 - |
| 2.3. MÍRA NADKUŽELE | - 36 - |
| 2.4. VZOROVÉ PŘÍKLADY | - 38 - |
| 2.4.1. <i>Obsah omezené plochy v E_2</i> | - 38 - |
| 2.4.2. <i>Objem tělesa v E_3</i> | - 39 - |
| 3. VÝPOČET OBJEMU TĚLESA V E_N POMOCÍ BĚŽNÉ A NOVÉ METODY | - 40 - |
| 3.1. ZADÁNÍ PŘÍKLADU | - 40 - |
| 3.2. VÝPOČET PŘÍKLADU POMOCÍ BĚŽNÉ METODY | - 40 - |
| 3.3. VÝPOČET PŘÍKLADU POMOCÍ NOVÉ METODY | - 42 - |
| 3.4. POROVNÁNÍ OBOU METOD | - 43 - |
| 4. PŘÍKLADY NA PROCVIČENÍ | - 44 - |
| 4.1. PŘÍKLAD 1 | - 44 - |
| 4.2. PŘÍKLAD 2 | - 46 - |
| 4.3. PŘÍKLAD 3 | - 47 - |
| 4.4. PŘÍKLAD 4 | - 48 - |
| 4.5. PŘÍKLAD 5 | - 50 - |
| 4.6. PŘÍKLAD 6 | - 52 - |
| 4.7. PŘÍKLAD 7 | - 54 - |
| 4.8. PŘÍKLAD 8 | - 56 - |
| ZÁVĚR | - 58 - |
| POUŽITÉ ZDROJE | - 59 - |

Úvod

Na vysokých školách, kde součástí studia je matematická analýza, se téměř každý student seznámí s aplikací dvojných a trojných integrálů. Jedná se konkrétně o výpočty obsahů a objemů těles v E_n , ale také o výpočty těžišť, statických momentů a momentů setrvačnosti.

Diplomová práce je rozdělena do čtyř částí. V první části se čtenář seznámí s konkrétními příklady rovinných křivek v E_2 , ploch v E_3 a s jejich parametrickým vyjádřením, které jsou následovně užity v řešených příkladech.

Další část popisuje novou, ve škole neprobíranou, teorii, která je doplněna vzorovými příklady na procvičení.

V třetí části dochází k porovnání nové metody s metodou běžnou. Jsou zde vyzdvihnuty výhody popřípadě nevýhody obou metod. U běžného postupu výpočtů objemu tělesa v E_3 je použit způsob výpočtů pomocí sférických souřadnic pro snadné srovnání s novou metodou (neboť k této problematice existuje více variant výpočtů bez užití parametrického popisu).

V poslední části se nachází soubor řešených příkladů, které jsou řazeny podle obtížnosti. Vzorová řešení příkladů jsou provedena na základě nového způsobu výpočtů.

1. Parametrizace

Parametrické vyjádření křivek v E_2 a ploch v E_3 je pro nás v této práci nepostradatelné, neboť je součástí výpočtů objemů těles v E_n na základě nové metody.

Z tohoto důvodu je zde vytvořen jakýsi přehled nejdůležitějších a nejznámějších křivek a ploch, které budeme následovně používat v příkladech.

1.1. Rovinné křivky v E_2

Křivkou definovanou parametricky v dvojrozměrném euklidovském prostoru E_2 nazýváme množinu právě těch bodů, jejichž kartézské souřadnice x, y jsou dány rovnicemi

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

kde φ, ψ jsou reálné funkce reálné proměnné t , definované na nějakém intervalu J , které mají spojitě derivace podle t alespoň prvního řádu a pro něž vztahy

$$\dot{\varphi}(t) = 0, \quad \dot{\psi}(t) = 0$$

oba zároveň platí jen v izolovaných bodech intervalu J .

Rovnice $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ nazýváme *parametrickými rovnicemi* křivky.

Křivkou definovanou implicitně v dvojrozměrném euklidovském prostoru E_2 nazýváme množinu právě těch bodů, jejichž kartézské souřadnice x, y jsou dány rovnicí

$$F(x, y) = 0,$$

kde F je reálná funkce dvou reálných proměnných na množině $\Omega_2 \subseteq E_2$, která má spojitě první parciální derivace a pro niž vztahy

$$F(x_0, y_0) = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

všechny tři zároveň platí jen v izolovaných bodech oboru Ω_2 .

Je-li křivka definována implicitně, pak ji lze v dostatečně malém okolí každého jejího bodu vyjádřit parametricky, a obráceně, je-li definována parametricky, pak ji lze na okolí každého jejího bodu vyjádřit implicitně.

Graf spojitě diferencovatelné funkce $y = f(x)$ ($x \in \langle a, b \rangle$) je křivka definovaná parametricky rovnicemi $x = t, y = f(t)$ ($t \in \langle a, b \rangle$). Graf diferencovatelné funkce $y = f(x)$ ($x \in \langle a, b \rangle$) je křivka definovaná implicitně rovnicí

$$F(x, y) = y - f(x) = 0.$$

1.2. Příklady rovinných křivek v E_2 a jejich parametrické vyjádření

1.2.1. Kružnice

Kružnicí k se středem S a poloměrem r nazýváme množinu právě těch bodů roviny, které mají stejnou vzdálenost r od pevného bodu S , zvaného střed kružnice k .

Rovnice kružnice se středem S v počátku $O[0;0]$ (Obr. 1):

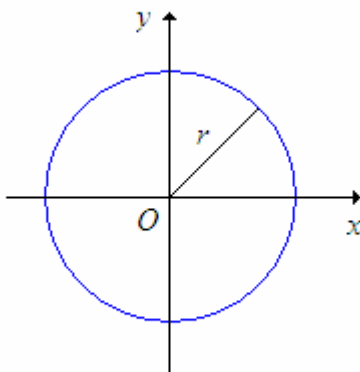
$$x^2 + y^2 = r^2, \quad (1)$$

kde r je poloměr kružnice.

Parametrické rovnice kružnice se středem $S[0,0]$ a poloměrem r :

$$\begin{aligned} x &= r \cos t, \\ y &= r \sin t, \end{aligned} \quad (2)$$

kde $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ je proměnný parametr.



Obr. 1 Kružnice

1.2.2. Elipsa

Elipsou nazýváme množinu právě těch bodů P v rovině, které mají od dvou pevných bodů F_1, F_2 (tzv. ohnisek) konstantní součet vzdáleností $|PF_1| + |PF_2| = 2a$, přičemž je $2a > |F_1F_2| = 2e > 0$. Označení $e = \sqrt{a^2 - b^2}$ nazýváme *délkovou excentricitou*, kde a je délka hlavní poloosy a b je délky vedlejší poloosy ($b < a$).

Poznámka:

Leží-li ohniska elipsy na ose y , konstantu $2a$ z definice značíme $2b$, přičemž $e = \sqrt{b^2 - a^2}$.

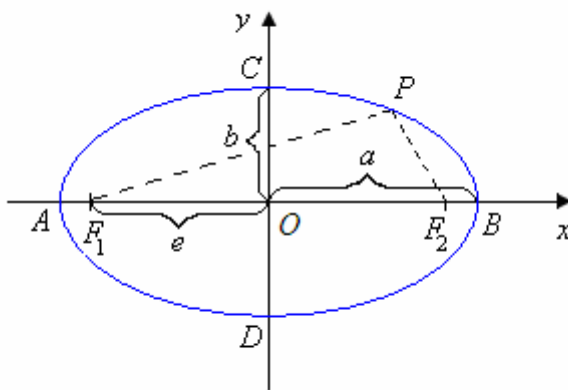
Kanonický tvar středové rovnice elipsy s hlavní osou v ose x (Obr. 2):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (3)$$

Parametrické rovnice elipsy:

$$\begin{aligned} x &= a \cos t, \\ y &= b \sin t, \end{aligned} \quad (4)$$

$\forall t \in \langle 0, 2\pi \rangle$, kde t je *excentrická anomálie*.



Obr. 2 Elipsa

1.2.3. Parabola

Parabolou nazýváme množinu právě těch bodů roviny, které mají stejné vzdálenosti od pevného bodu F této roviny (tzv. ohniska) a od pevné přímky d této roviny (tzv. řídící přímky), přičemž přímka d neprochází bodem F .

Kanonický tvar rovnice paraboly s osou v ose x a s vrcholem v počátku souřadnicové soustavy:

$$y^2 = 2px, \quad (5)$$

přičemž pro $p > 0$, resp. $p < 0$ je parabola otevřená doprava, resp. doleva.

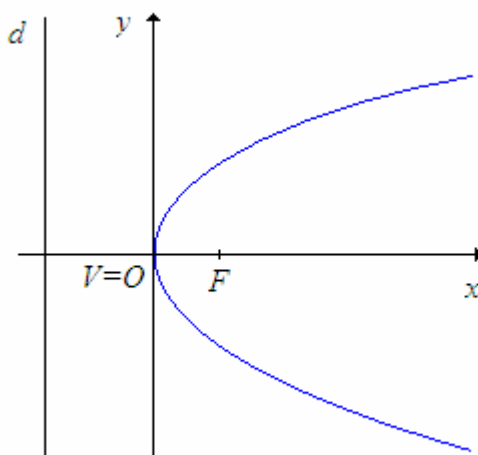
Kanonický tvar paraboly s osou v ose y a s vrcholem v počátku souřadnicové soustavy:

$$x^2 = 2py, \quad (6)$$

přičemž pro $p > 0$, resp. $p < 0$ je parabola otevřená nahoru, resp. dolů.

Parametrické vyjádření paraboly:

$$\begin{aligned} x &= pt^2, \\ y &= 2pt \end{aligned} \quad \text{nebo} \quad \begin{aligned} x &= \frac{t^2}{4p}, \\ y &= t. \end{aligned} \quad (7)$$



Obr. 3 Parabola

1.2.5. Cyklické křivky

Jestliže se kružnice k_1 (tzv. *hybná kružnice*) kotálí po kružnici k_2 (tzv. *nehybná kružnice*) ve vnější nebo vnitřní oblasti kružnice k_2 , pak body hybné kružnice k_1 nebo body s ní pevně spojené vytvářejí tzv. *cyklické křivky* neboli *trochoidy*.

Prostá cykloida

Bod kružnice, která se beze skluzu kotálí po přímce, opisuje *prostou cykloidu* (Obr. 5).

Parametrické rovnice prosté cykloidy:

$$\begin{aligned} x &= a(t - \sin t), \\ y &= a(1 - \cos t), \end{aligned} \quad (10)$$

pro $t \in \mathbf{R}$, kde a je poloměr kružnice, t je velikost úhlu odvalení.

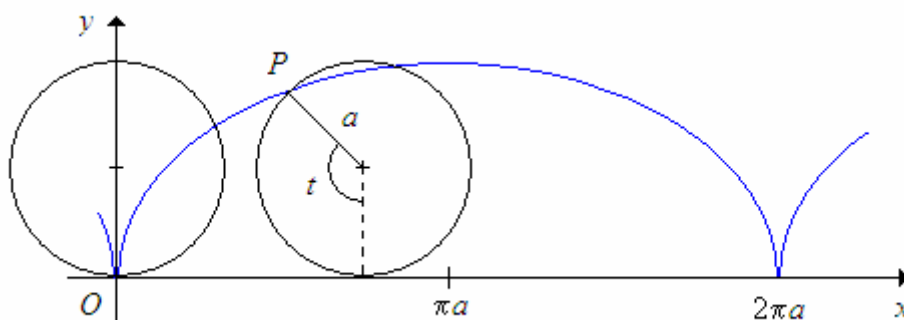
Explicitní vyjádření první, resp. druhé poloviny prvního oblouku prosté cykloidy:

$$x = a \arccos \frac{a-y}{a} - \sqrt{[y(2a-y)]}, \quad (11)$$

resp.

$$x = a \left(2\pi - \arccos \frac{a-y}{a} \right) + \sqrt{[y(2a-y)]}, \quad (12)$$

kde $y \in \langle 0; 2a \rangle$.



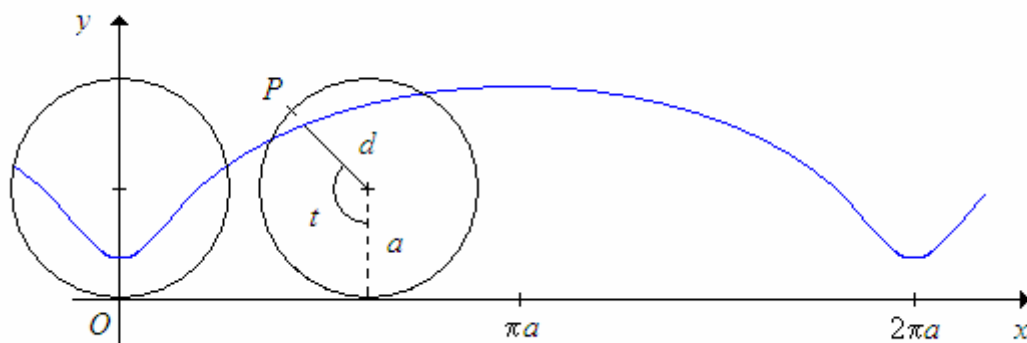
Obr. 5 Prostá cykloida

Zkrácená cykloida

Zkrácená cykloida vznikne, jestliže tvořící bod pevně spojený s kotálející se kružnicí leží ve vnitřní oblasti této kružnice ve vzdálenosti d ($d < a$) od středu kružnice o poloměru a (Obr. 6).

Parametrické rovnice zkrácené cykloidy:

$$\begin{aligned} x &= at - d \sin t, \\ y &= a - d \cos t, \quad t \in \mathbf{R}. \end{aligned} \tag{13}$$



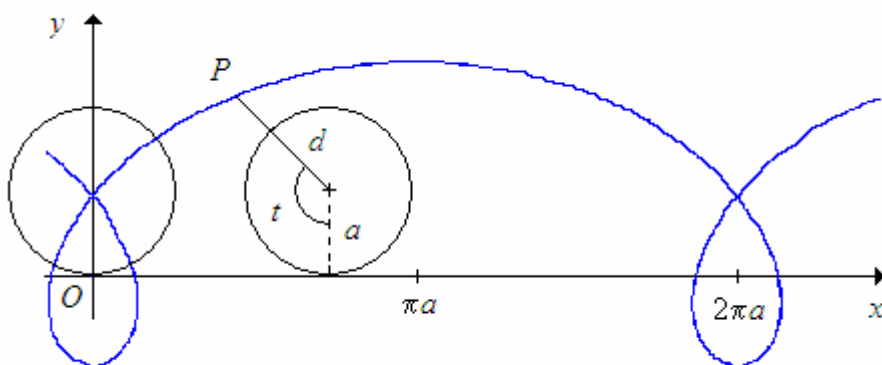
Obr. 6 Zkrácená cykloida

Prodloužená cykloida

Prodloužená cykloida vznikne, jestliže tvořící bod pevně spojený s kotálející se kružnicí leží ve vnější oblasti této kružnice ve vzdálenosti d ($d > a$) od středu kružnice o poloměru a (Obr. 7).

Parametrické rovnice prodloužené cykloidy:

$$\begin{aligned} x &= at - d \sin t, \\ y &= a - d \cos t, \quad t \in \mathbf{R}. \end{aligned} \tag{14}$$



Obr. 7 Prodloužená cykloida

Kardioida

Je to zvláštní případ zkrácené¹, resp. prodloužené epicykloidy. Prostá² epicykloida pro $a = b$ se nazývá *kardioida* (*srdcovka*), kde a je poloměr nehybné kružnice a b je poloměr hybné kružnice (Obr. 8).

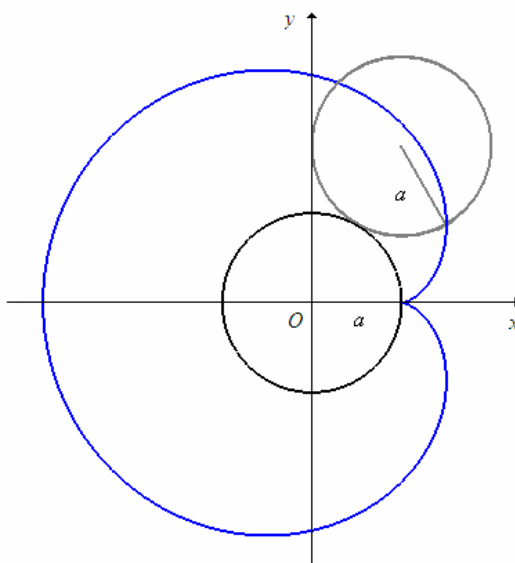
Rovnice v ortonormální souřadnicové soustavě:

$$(x^2 + y^2 - a^2)^2 = 4a^2[(x - a)^2 + y^2] \quad (15)$$

přičemž počátek je ve středu nehybné kružnice a osou x je prodloužení úsečky spojující počátek s hrotem.

Parametrické rovnice kardioidy:

$$\begin{aligned} x &= a[2 \cos t - \cos(2t)], \\ y &= a[2 \sin t - \sin(2t)], \quad t \in \mathbf{R}. \end{aligned} \quad (16)$$



Obr. 8 Kardioida

¹ Zkrácená, resp. prodloužená epicykloida vznikne, jestliže tvořící bod pevně spojený s hybnou kružnicí leží ve vnitřní, resp. vnější oblasti této kružnice ve vzdálenosti $d < b$, resp. $d > b$ od středu hybné kružnice o poloměru b .

² Bod kružnice, která se beze skluzu kotálí po nehybné kružnici v její vnější oblasti, opisuje *prostou epicykloidu*.

Nefroida

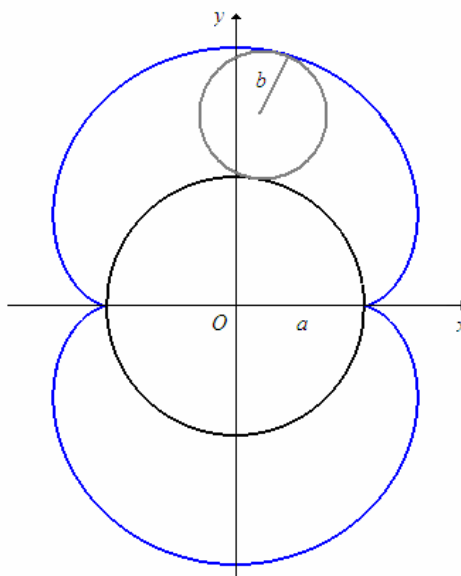
Prostá epicykloida s $b = \frac{a}{2}$ je označována jako *nefroida*, kde a je poloměr nehybné kružnice a b je poloměr hybné kružnice.

Rovnice v kartézských souřadnicích:

$$(x^2 + y^2 - 4a^2)^3 = 108a^4 y^2. \quad (17)$$

Parametrické vyjádření nefroidy:

$$\begin{aligned} x &= b(3 \cos t - \cos 3t), \\ y &= b(3 \sin t - \sin 3t), \quad t \in \mathbf{R}. \end{aligned} \quad (18)$$



Obr. 9 Nefroida

Asteroida

Asteroida (hvězdice) je zvláštní případ prosté³ hypocykloidy pro $b = \frac{a}{4}$, kde a je poloměr nehybné kružnice a b je poloměr hybné kružnice (Obr. 10).

Parametrické rovnice asteroidy:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{4}a \left(3 \cos \frac{t}{4} + \cos \frac{3t}{4} \right), \\ y &= \frac{1}{4}a \left(3 \sin \frac{t}{4} - \sin \frac{3t}{4} \right), \quad t \in \mathbf{R}, \end{aligned} \quad (19)$$

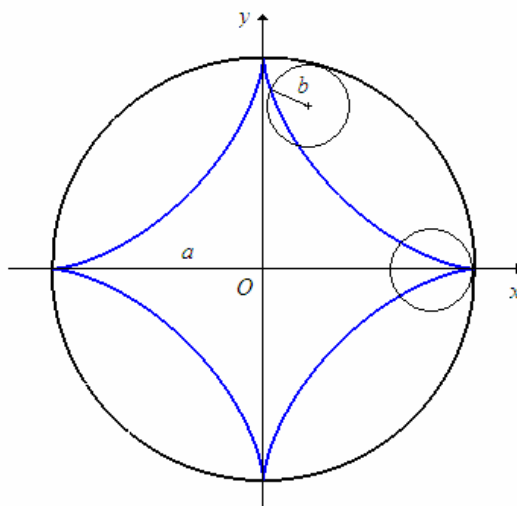
popř.

$$\begin{aligned} x &= b[3 \cos \chi + \cos(3\chi)], \\ y &= b[3 \sin \chi - \sin(3\chi)], \quad \chi \in \mathbf{R}. \end{aligned} \quad (20)$$

Rovnice v ortonormální souřadnicové soustavě:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}, \quad (21)$$

přičemž počátek je ve středu pevné kružnice a osou x je prodloužení úsečky spojující počátek s hrotem.



Obr. 10 Asteroida

³ Bod kružnice, která se beze skluzu kotálí po nehybné kružnici v její vnitřní oblasti, opisuje prostou hypocykloidu.

1.2.6. Bernoulliiova lemniskáta

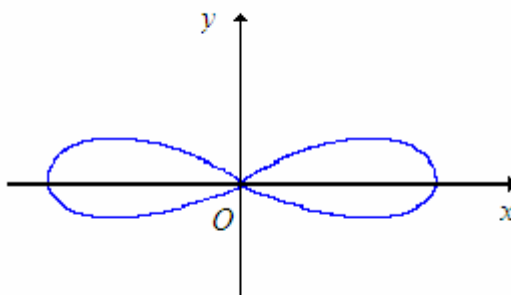
Bernoulliiova lemniskáta je zvláštním případem Cassiniovy⁴ křivky pro $a^2 = e^2$ (Obr. 11).

Rovnice Bernoulliiovy lemniskáty v parametrickém vyjádření:

$$\begin{aligned} x &= at\sqrt{2} \frac{1+t^2}{1+t^4}, \\ y &= at\sqrt{2} \frac{1-t^2}{1+t^4}, \quad t \in \mathbf{R}. \end{aligned} \quad (22)$$

Rovnice v ortonormální souřadnicové soustavě:

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2) \quad (23)$$



Obr. 11 Bernoulliiova lemniskáta

⁴ *Cassiniovou křivkou* nazýváme množinu všech bodů, že součin jejich vzdáleností od dvou různých pevných bodů (tzv. ohnisek) F_1 a F_2 je konstantní: $|XF_1| \cdot |XF_2| = a^2$. Rovnice Cassiniovy křivky v ortonormální souřadnicové soustavě je $(x^2 + y^2)^2 - 2e^2(x^2 - y^2) = a^4 - e^4$, kde $e = \frac{|F_1F_2|}{2}$.

1.2.7. Descartesův list

Descartesovým listem nazýváme kisoidu⁵ elipsy $x^2 - xy + y^2 + a(x + y) = 0$, $a > 0$, a přímky $x + y + a = 0$ pro pól P (Obr. 12).

Rovnice v Descartesova listu v parametrickém vyjádření:

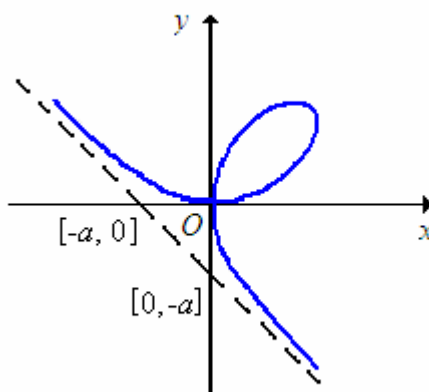
$$\begin{aligned} x &= \frac{3at}{1+t^3}, \\ y &= \frac{3at^2}{1+t^3}, \quad t \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}. \end{aligned} \quad (24)$$

Rovnice v ortonormální souřadnicové soustavě:

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0. \quad (25)$$

Asymptota Descartesova listu:

$$y = -x - a.$$



Obr. 12 Descartesův list

⁵ Kisoidou dvojice křivek m , n pro pól P nazýváme množinu právě těch bodů Q , pro něž platí $|PQ| = |PL| - |PK|$, kde K , resp. L je průsečík libovolné polopřímky svazku o vrcholu P s křivkou m , resp. n .

1.2.8. Strofoida

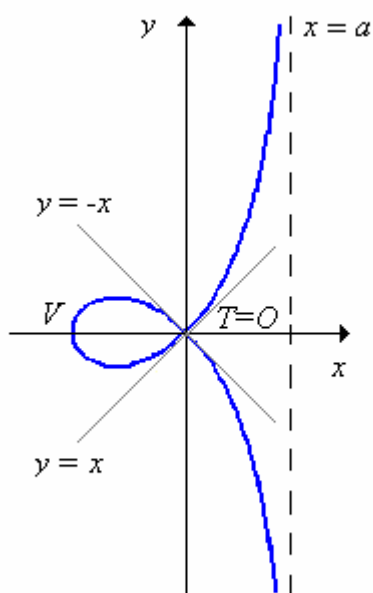
Strofoidou nazýváme množinu všech průsečíků každé ze svazku kružnic, které mají společnou tečnu v ose x s bodem dotyku $T[0,0]$, s jejím průměrem ležícím na polopřímce svazku o vrcholu $V[-a,0]$, $a > 0$ (Obr. 13).

Parametrické vyjádření strofoidy:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-a(1-t^2)}{1+t^2}, \\ y &= \frac{-at(1-t^2)}{1+t^2}, \quad t \in \mathbf{R}. \end{aligned} \quad (26)$$

Rovnice strofoidy v ortonormální souřadnicové soustavě:

$$(a-x)y^2 = (a+x)x^2, \quad x \in \langle -a; a \rangle \quad (27)$$



Obr. 13 Strofoida

1.3. Plochy v \mathbf{E}_3

Plochou definovanou parametricky v trojrozměrném euklidovském prostoru \mathbf{E}_3 nazýváme množinu právě těch bodů, jejichž kartézské souřadnice x, y, z jsou dány rovnicemi $x = \xi(u, v)$, $y = \eta(u, v)$, $z = \zeta(u, v)$, kde ξ, η, ζ jsou reálné funkce dvou reálných parametrů, definované na množině Ω_2 , které mají spojité parciální derivace aspoň prvního řádu, přičemž

matice $\begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial u} & \frac{\partial \eta}{\partial u} & \frac{\partial \zeta}{\partial u} \\ \frac{\partial \xi}{\partial v} & \frac{\partial \eta}{\partial v} & \frac{\partial \zeta}{\partial v} \end{pmatrix}$ má hodnotu 2 na určitém dvojrozměrném intervalu $J_1 \times J_2$.

Plochou definovanou implicitně v trojrozměrném euklidovském prostoru \mathbf{E}_3 nazýváme množinu právě těch bodů, jejichž kartézské souřadnice jsou dány rovnicí $F(x, y, z) = 0$, kde F je reálná funkce tří reálných proměnných na množině $\Omega_3 \subseteq \mathbf{E}_3$, která má spojité parciální derivace na množině Ω_3 a v žádném bodě množiny $\Omega_3^* \subseteq \Omega_3$ zároveň neplatí $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z} = 0$.

Graf spojitě diferencovatelné funkce $z = f(x, y)$ je plochou definovanou parametricky rovnicemi $x = u$, $y = v$, $z = f(u, v)$ a plochou definovanou implicitní rovnicí $z - f(x, y) = 0$.

1.4. Příklady ploch v E_3 a jejich parametrické vyjádření

1.4.1. Kulová plocha

Množina všech bodů prostoru, které mají od daného pevného bodu S danou vzdálenost $r > 0$, se nazývá *kulová plocha* se středem S a poloměrem r .

Rovnice kulové plochy se středem $S[0, 0, 0]$ a poloměrem r :

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2. \quad (28)$$

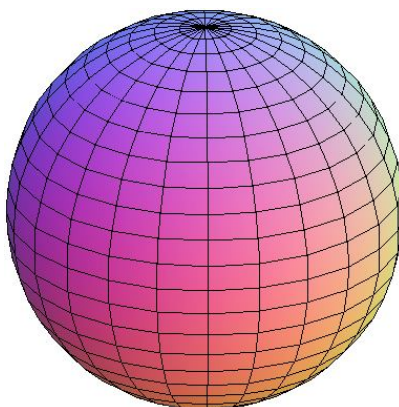
Vyjádření kulové plochy pomocí sférických souřadnic:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi \sin \nu, \\ y &= \rho \sin \varphi \sin \nu, \\ z &= \rho \cos \nu, \end{aligned} \quad (29)$$

nebo

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi \cos \nu, \\ y &= \rho \sin \varphi \cos \nu, \\ z &= \rho \sin \nu, \end{aligned} \quad (30)$$

pro $\rho \geq 0$, $\varphi \in \langle 0; 2\pi \rangle$, $\nu \in \langle 0; \pi \rangle$.



Obr. 14 Kulová plocha

1.4.2. Válcová plocha

Nechť je dána elipsa v rovině ρ a přímka s různoběžná s rovinou ρ . Sjednocení všech přímk, které jsou rovnoběžné s přímkou s a protínají elipsu, se nazývá *eliptická válcová plocha*.

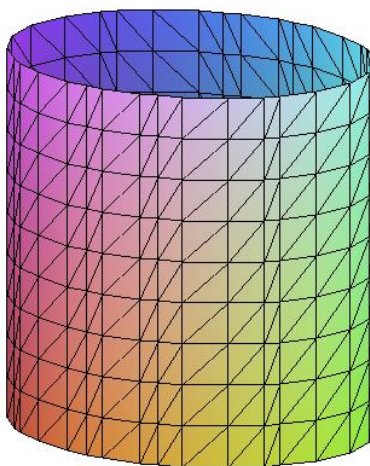
Obecná rovnice eliptické válcové plochy:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (31)$$

Válcové souřadnice:

$$\begin{aligned} x &= a \cos \theta, \\ y &= b \sin \theta, \\ z &= v, \quad v \in \langle 0; h \rangle, \quad \theta \in \langle 0; 2\pi \rangle, \end{aligned} \quad (32)$$

kde a, b jsou délky poloos a platí $a, b > 0$.



Obr. 15 Eliptická válcová plocha

1.4.3. Kuželová plocha

Nechť je dána kružnice k v rovině ρ a bod V , který neleží v této rovině. Sjednocení všech přímek, které procházejí bodem V a protínají kružnici k , se nazývá *kruhová kuželová plocha*.

Obecná rovnice kuželové plochy:

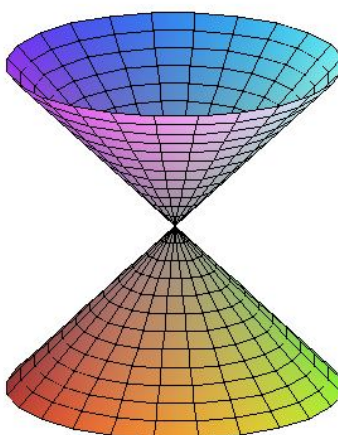
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \quad (33)$$

kde a, b jsou délky poloos elipsy, která je řídící křivkou kuželové plochy a jejíž rovina je kolmá k ose z ; c je vzdálenost roviny elipsy od roviny xy ; vrchol kuželové plochy je v počátku O .

Parametrické vyjádření kuželové plochy:

$$\begin{aligned} x &= \frac{h-u}{h} r \cos \theta, \\ y &= \frac{h-u}{h} r \sin \theta, \\ z &= u, \end{aligned} \quad (34)$$

pro $u \in \langle 0; h \rangle$, $\theta \in \langle 0; 2\pi \rangle$, kde h je výška kužele a r je poloměr.



Obr. 16 Kuželová plocha

1.4.4. Elipsoid

Rotačním zploštělým elipsoidem nazýváme těleso ohraničené plochou vytvořenou při rotaci elipsy s poloosami délek a, b ($a > b$) kolem vedlejší osy.

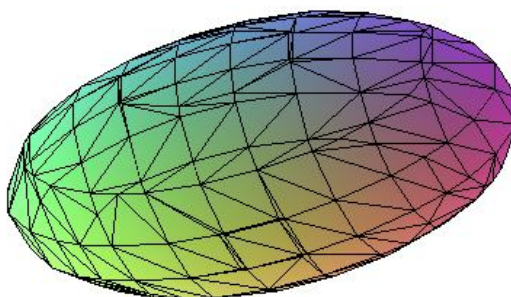
Obecná rovnice plochy elipsoidu:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (35)$$

Parametrické vyjádření elipsoidu:

$$\begin{aligned} x &= a \cos \theta \sin \phi, \\ y &= b \sin \theta \sin \phi, \\ z &= c \cos \phi, \end{aligned} \quad (36)$$

pro azimut $\theta \in \langle 0; 2\pi \rangle$, polární úhel $\phi \in \langle 0; \pi \rangle$.



Obr. 17 Elipsoid

1.4.5. Paraboloid

Eliptický paraboloid

Rotačním paraboloidem nazýváme těleso ohraničené plochou vzniklou při rotaci části paraboly s jejím vrcholem kolem její osy a kruhem, jehož rovina je kolmá k ose rotace paraboly a protíná osu paraboly.

Eliptickým paraboloidem nazýváme těleso, jehož podstava má eliptický tvar.

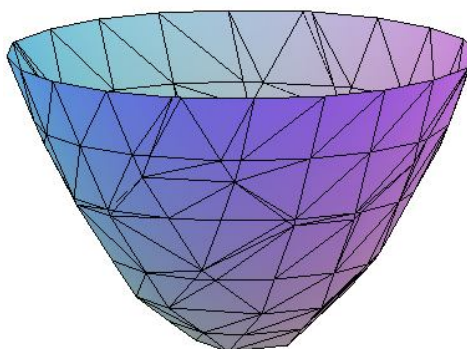
Obecná rovnice plochy eliptického paraboloidu:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z. \quad (37)$$

Parametrické vyjádření eliptického paraboloidu:

$$\begin{aligned} x &= a\sqrt{u} \cos v, \\ y &= b\sqrt{u} \sin v, \\ z &= u, \quad v \in \langle 0; 2\pi \rangle, u \in \langle 0; h \rangle, \end{aligned} \quad (38)$$

kde a, b jsou délky poloos a platí $a, b > 0$.



Obr. 18 Eliptický paraboloid

Hyperbolický paraboloid

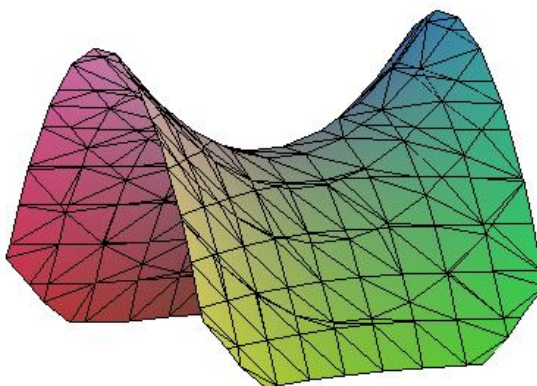
Hyperbolický paraboloid je těleso, jehož rovinným řezem je hyperbola.

Středová rovnice hyperbolického paraboloidu:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z. \quad (39)$$

Parametrické vyjádření hyperbolického paraboloidu:

$$\begin{aligned} x(u, v) &= u, \\ y(u, v) &= v, \\ z(u, v) &= uv, \quad v \in \langle 0; 2\pi \rangle, u \in \langle 0; h \rangle. \end{aligned} \quad (40)$$



Obr. 19 Hyperbolický paraboloid

1.4.6. Hyperboloid

Rotační jednodílný hyperboloid

Rotačním jednodílným hyperboloidem nazýváme těleso ohraničené plochou vytvořenou při rotaci hyperboly s poloosami délek a, b ($a > b$) kolem vedlejší osy a dvěma shodnými kruhy, jejichž roviny jsou kolmé k ose rotace hyperboly (Obr. 20).

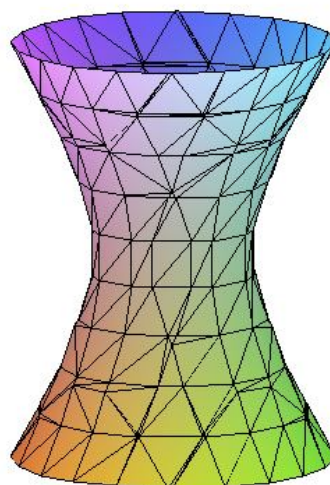
Středová rovnice jednodílného hyperboloidu:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (41)$$

kde a, b jsou délky reálných poloos; c je délka imaginární poloosy.

Parametrické vyjádření tělesa:

$$\begin{aligned} x &= a\sqrt{1+u^2} \cos v, \\ y &= b\sqrt{1+u^2} \sin v, \\ z &= cu, \quad u \in \langle 0; h \rangle, v \in \langle 0; 2\pi \rangle. \end{aligned} \quad (42)$$



Obr. 20 Jednodílný hyperboloid

Rotační dvoudílný hyperboloid

Rotačním dvoudílným hyperboloidem nazýváme těleso ohraničené plochou vytvořenou při rotaci hyperboly s poloosami délek a, b ($a > b$) kolem hlavní osy a dvěma shodnými kruhy, jejichž roviny jsou kolmé k ose rotace hyperboly (Obr. 21).

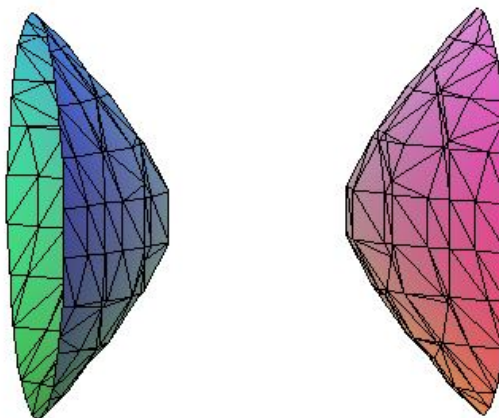
Středová rovnice dvoudílného hyperboloidu:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (43)$$

kde c je délka reálné poloosy; a, b jsou délky imaginárních poloos.

Parametrické vyjádření tělesa:

$$\begin{aligned} x &= a \sinh u \cos v, \\ y &= b \sinh u \sin v, \\ z &= c \cosh u, \quad u \in (-\infty; \infty), v \in \langle 0; \pi \rangle. \end{aligned} \quad (44)$$



Obr. 21 Dvoudílný hyperboloid

1.4.7. Anuloid

Anuloid (torus) je těleso, které vznikne při rotaci kružnice s poloměrem r kolem osy ležící v rovině této kružnice ve vzdálenosti R ($R > r$) od středu kružnice (Obr. 22).

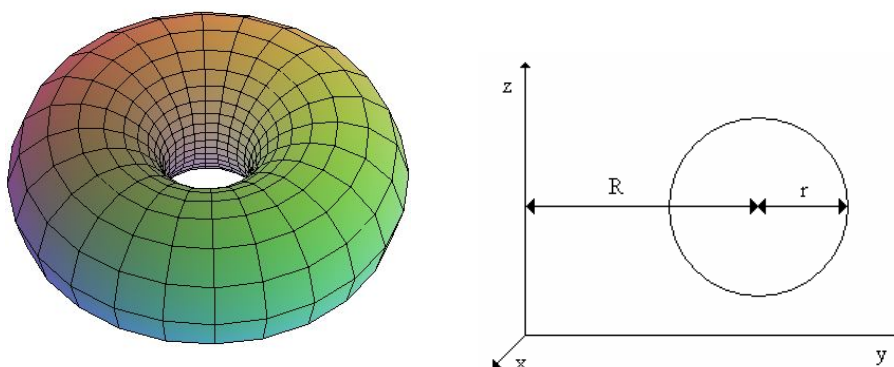
Středový tvar rovnice anuloidu:

$$\left(R - \sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 + z^2 = r^2, \quad (45)$$

kde r je poloměr kružnice; R je vzdálenost od osy rotace ke středu kružnice.

Parametrické vyjádření anuloidu:

$$\begin{aligned} x &= (R + r \cos v) \cos u, \\ y &= (R + r \cos v) \sin u, \\ z &= r \sin v, \quad u, v \in \langle 0; 2\pi \rangle. \end{aligned} \quad (46)$$



Obr. 22 Anuloid

2. Objemy omezených uzavřených těles s užitím parametrického popisu v \mathbf{E}_n

2.1. Úvod

Jedna ze známých aplikací vícerozměrného reálného integrálu je výpočet objemů těles obvykle v n -rozměrném prostoru \mathbf{R}_n . Na základě následující teorie budeme počítat obsahy n -rozměrných těles v euklidovském prostoru \mathbf{E}_n , jež je možné popisovat parametricky. Otázkou je existence těchto zobrazení.

2.2. Hlavní podmínky a zavedení symboliky

Uvažme euklidovský n -rozměrný prostor \mathbf{E}_n s body \mathbf{x} , $n \geq 2$. Označme

x^α , $\alpha = 1, \dots, n$, kartézské souřadnice bodu $\mathbf{x} \in \mathbf{E}_n$,

u^a , $a = 1, \dots, n-1$, kartézské souřadnice bodu $\mathbf{u} \in \mathbf{E}_{n-1}$.

Nechť Ω je omezená uzavřená oblast v \mathbf{E}_{n-1} a $x^\alpha(u^1, \dots, u^{n-1})$, kde $\alpha = 1, \dots, n$, jsou dané funkce definované na libovolné oblasti $O \subset \mathbf{E}_{n-1}$, $\Omega \subset O$. Předpokládejme, že

- a) vektorová funkce $\mathbf{x}(\mathbf{u}) = \{x^\alpha(u^a)\}$ má skoro všude v Ω spojitě parciální derivace

$$B_a^\alpha := \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^a} \quad \text{pro } \alpha = 1, \dots, n, \quad a = 1, \dots, n-1;$$

- b) hodnost matice

$$(B_a^\alpha)_{n \times (n-1)} = \begin{pmatrix} B_1^1 & B_1^2 & \dots & B_1^n \\ B_2^1 & B_2^2 & \dots & B_2^n \\ \vdots & & & \vdots \\ B_{n-1}^1 & B_{n-1}^2 & \dots & B_{n-1}^n \end{pmatrix}$$

je maximální v oblasti Ω , tj. rovná $n-1$ skoro všude v oblasti Ω ;

- c) podmnožina

$$P^O := \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_n \mid \mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{u}), \mathbf{u} \in \text{int } \Omega\}$$

matice

$$P := \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_n \mid \mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{u}), \mathbf{u} \in \Omega\} \quad (47)$$

je homeomorfní obraz množiny $\text{int } \Omega$ (o všech vnitřních bodech množiny Ω) v \mathbf{E}_n .

Z daných předpokladů vyplývá, že množina P je omezená a po částech hladká nadplocha v prostoru \mathbf{E}_n . Tato nadplocha sama sebe neprotíná a rozděluje prostor \mathbf{E}_n na dvě disjunktní oblasti v \mathbf{E}_n , z nichž jedna je omezená a druhá neomezená.

Uzávěr omezené oblasti se nazývá n -rozměrné těleso v prostoru \mathbf{E}_n . Označme ho W .

Poznámka:

Speciálně pro

$n = 3$, nechť je tento uzavěr nazván *tělesem* v \mathbf{E}_3 ,

$n = 2$ uzavřenou plochou v \mathbf{E}_2 .

Jestliže označíme $\text{int } W$ množinu všech vnitřních bodů množiny W a hranici ∂W množiny W , potom platí

$$W = P \cup \text{int } W, \text{ kde } \partial W = P.$$

Uvažme uzavěr nadplochy P jako množinu bodů vnořenou do euklidovského prostoru $\mathbf{E}_{n+1} = \mathbf{E}_n \times \mathbf{E}_1$. Potom tato nadplocha P může být vyjádřena ve tvaru

$$P := \left\{ X = (\mathbf{x}; x^{n+1}) \in \mathbf{E}_{n+1} \mid \mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{u}), x^{n+1} = 0, \mathbf{u} \in \Omega \right\} \quad (48)$$

Zvolme bod $V = (\mathbf{x}_0; x_0^{n+1})$ v prostoru \mathbf{E}_{n+1} , kde $x_0^{n+1} > 0$, a množinu všech polopřímek

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{x}_0 + [\mathbf{x}(\mathbf{u}) - \mathbf{x}_0]t, \\ x^{n+1} &= x_0^{n+1}(1-t), \quad \mathbf{u} \in \Omega, \quad t \in \langle 0; +\infty \rangle. \end{aligned} \quad (49)$$

Tato množina tvoří *kuželovou nadplochu* v \mathbf{E}_{n+1} s vrcholem V . Díky podmínce

$$x^{n+1} \geq 0 \quad (50)$$

dostaneme po částech hladkou a uzavřenou omezenou nadplochu⁶ v \mathbf{E}_{n+1} . Tato nadplocha dělí prostor \mathbf{E}_{n+1} do dvou disjunktních oblastí, kde jedna z nich je omezená a druhá neomezená. Uzávěr příslušné omezené oblasti označme K . Potom množinu K nazýváme *nadkuželem* v prostoru \mathbf{E}_{n+1} s vrcholem $V = (\mathbf{x}_0; x_0^{n+1})$, množinu W nazveme jeho *základnou* a číslo $x^{n+1} > 0$ jeho *výškou*.

⁶ Pod pojmem „uzavřená nadplocha v \mathbf{E}_n “ rozumíme nadplochu v \mathbf{E}_n , která je homeomorfním obrazem hypersféry v \mathbf{E}_n , jestliže takové zobrazení existuje.

2.3. Míra nadkužele

Zde bychom měli určit objem nadkužele K , tj. určit míru množiny K . Míra množiny K je dána vztahem

$$I = \int \int \dots \int_K dx^1 dx^2 \cdot \dots \cdot dx^{n+1}. \quad (51)$$

Pro výpočet tohoto integrálu zavedeme zobecněné souřadnice u^a, t, v v prostoru \mathbf{E}_{n+1} , kde $a = 1, \dots, n-1$. Následující vztahy definují souřadnice

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{x}_0 + [\mathbf{x}(\mathbf{u}) - \mathbf{x}_0]t, \\ x^{n+1} &= v(1-t), \quad \mathbf{u} \in \Omega, \quad t \in \langle 0; 1 \rangle, \quad v \in \langle 0; x_0^{n+1} \rangle. \end{aligned} \quad (52)$$

V tomto případě můžeme předpokládat, že $V = \langle 0; x_0^{n+1} \rangle$, tj. $x_0^\alpha = 0, \alpha = 1, \dots, n$, bez újmy na obecnosti. Potom můžeme vztah (52) zjednodušit na tvar

$$\begin{aligned} x^\alpha &= x^\alpha(u^\alpha)t, \quad \alpha = 1, \dots, n, \\ x^{n+1} &= v(1-t). \end{aligned} \quad (53)$$

Jestliže můžeme určit souřadnice ze vztahu (53), dostaneme integrál ve tvaru

$$I = \int \int \dots \int_{K'} J du^1 du^2 \cdot \dots \cdot du^{n-1} dt dv, \quad (54)$$

kde symbol J značí jakobián příslušné transformace (53) a množinu $K' = \Omega \times \langle 0; 1 \rangle \times \langle 0; x_0^{n+1} \rangle$.

Ze vztahu (53) plyne tvar jakobiánu

$$\begin{aligned} J &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial t} & \frac{\partial x^2}{\partial t} & \dots & \frac{\partial x^n}{\partial t} & \frac{\partial x^{n+1}}{\partial t} \\ t \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & t \frac{\partial x^2}{\partial u^1} & \dots & t \frac{\partial x^n}{\partial u^1} & t \frac{\partial x^{n+1}}{\partial u^1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t \frac{\partial x^1}{\partial u^{n-1}} & t \frac{\partial x^2}{\partial u^{n-1}} & \dots & t \frac{\partial x^n}{\partial u^{n-1}} & t \frac{\partial x^{n+1}}{\partial u^{n-1}} \\ t \frac{\partial x^1}{\partial v} & t \frac{\partial x^2}{\partial v} & \dots & t \frac{\partial x^n}{\partial v} & t \frac{\partial x^{n+1}}{\partial v} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} x^1(\mathbf{u}) & x^2(\mathbf{u}) & \dots & x^n(\mathbf{u}) & -v \\ B_1^1 & B_1^2 & \dots & B_1^n & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{n-1}^1 & B_{n-1}^2 & \dots & B_{n-1}^n & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1-t \end{vmatrix} \cdot t^{n-1}. \end{aligned}$$

Označme

$$\Delta(\mathbf{u}) := \begin{vmatrix} x^1(\mathbf{u}) & x^2(\mathbf{u}) & \cdots & x^n(\mathbf{u}) \\ B_1^1 & B_1^2 & \cdots & B_1^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{n-1}^1 & B_{n-1}^2 & \cdots & B_{n-1}^n \end{vmatrix}. \quad (55)$$

Potom absolutní hodnotu jakobiánu můžeme vyjádřit zkráceně ve tvaru

$$|J| = (t^{n-1} - t^n) \cdot |\Delta(\mathbf{u})|.$$

Pro integrál (54) dostáváme

$$\begin{aligned} I &= \iint \cdots \int_{\Omega} |\Delta(\mathbf{u})| du^1 du^2 \cdots du^{n-1} \cdot \int_0^1 (t^{n-1} - t^n) dt \cdot \int_0^{x_0^{n+1}} dv = \\ &= \frac{1}{n(n+1)} x_0^{n+1} \iint \cdots \int |\Delta(\mathbf{u})| du^1 du^2 \cdots du^{n-1}. \end{aligned}$$

Tudíž

$$I = \frac{x_0^{n+1}}{n+1} \iint \cdots \int \frac{1}{n} |\Delta(\mathbf{u})| du^1 du^2 \cdots du^n. \quad (56)$$

Číslo

$$\mu_W := \frac{1}{n} \iint \cdots \int |\Delta(\mathbf{u})| du^1 du^2 \cdots du^{n-1} \quad (57)$$

nazveme *objemem n -rozměrného tělesa W* v prostoru \mathbf{E}_n .

Speciálně pro

$n = 3$, se toto číslo nazývá *objem tělesa W v \mathbf{E}_3 ,*

$n = 2$ *obsah omezené plochy W v \mathbf{E}_2 .*

2.4. Vzorové příklady

2.4.1. Obsah omezené plochy v \mathbf{E}_2

Vypočítejte obsah plochy omezené Bernoulliiovou lemniskátou v prostoru \mathbf{E}_2 (viz kapitola 1.2.6) definovanou množinou $P := \{x \in \mathbf{E}_2 \mid (x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)\}, a \in \mathbf{R}^+$.

Řešení:

Rovnice Bernoulliovy lemniskáty v parametrickém vyjádření:

$$\begin{aligned}x &= at\sqrt{2} \frac{1+t^2}{1+t^4}, \\y &= at\sqrt{2} \frac{1-t^2}{1+t^4}, t \in \langle 0; 2\pi \rangle.\end{aligned}$$

Vypočítáme derivace

$$\begin{aligned}B_1^1 &= \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{a\sqrt{2}(1+3t^2-3t^4-t^6)}{(1+t^4)^2}, \\B_1^2 &= \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{a\sqrt{2}(1-3t^2-3t^4+t^6)}{(1+t^4)^2}.\end{aligned}$$

Determinant $\Delta(\mathbf{u})$ definovaný v (55) je roven

$$\Delta(u) = \Delta(t) = \begin{vmatrix} at\sqrt{2} \frac{1+t^2}{1+t^4} & at\sqrt{2} \frac{1-t^2}{1+t^4} \\ \frac{a\sqrt{2}(1+3t^2-3t^4-t^6)}{(1+t^4)^2} & \frac{a\sqrt{2}(1-3t^2-3t^4+t^6)}{(1+t^4)^2} \end{vmatrix} = -\frac{8a^2t^3}{(1+t^4)^2}.$$

K výpočtu objemu použijeme vztah (57)

$$\begin{aligned}\mu_W &= \frac{1}{2} \iint_{\Omega} |\Delta(t)| dt = \frac{1}{2} 8a^2 \int_0^{2\pi} \frac{t^3}{(1+t^4)^2} dt = 4a^2 \int_0^{2\pi} \frac{t^3}{(1+t^4)^2} dt = \left| \begin{array}{l} \text{substitute} \\ 1+t^4 = u \\ 4t^3 dt = du \end{array} \right| = \\ &= a^2 \int_1^{16\pi^4+1} \frac{1}{u^2} du = a^2 \left[-\frac{1}{u} \right]_1^{16\pi^4+1} = a^2 \frac{16\pi^4}{16\pi^4+1}.\end{aligned}$$

Jelikož $\frac{16\pi^4}{16\pi^4+1} \approx 1$, můžeme psát $\mu_W = a^2$.

Závěr:

Obsah plochy omezené Bernoulliiovou lemniskátou je přibližně a^2 .

2.4.2. Objem tělesa v E_3

Vypočítejte objem tělesa tvořeného eliptickou válcovou plochou (viz kapitola 1.4.2), která je definovaná množinou $P := \left\{ \mathbf{x} \in E_3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$, $a, b \in \mathbf{R}^+$.

Řešení:

Eliptická válcová plocha je popsána parametrickými rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= a \cos \theta, \\ y &= b \sin \theta, \\ z &= v, \\ v &\in \langle 0; h \rangle, \theta \in \langle 0; \pi \rangle, \end{aligned}$$

kde h je výška eliptického válce.

Vypočítáme derivace

$$\begin{aligned} B_1^1 &= \frac{\partial x}{\partial \theta} = -a \sin \theta, & B_2^1 &= \frac{\partial x}{\partial v} = 0, \\ B_1^2 &= \frac{\partial y}{\partial \theta} = b \cos \theta, & B_2^2 &= \frac{\partial y}{\partial v} = 0, \\ B_1^3 &= \frac{\partial z}{\partial \theta} = 0, & B_2^3 &= \frac{\partial z}{\partial v} = 1. \end{aligned}$$

Determinant $\Delta(\mathbf{u})$ definovaný v (55) je roven

$$\Delta(\theta; v) = \begin{vmatrix} a \cos \theta & b \sin \theta & v \\ -a \sin \theta & b \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = ab \cos^2 \theta + ab \sin^2 \theta = ab.$$

K výpočtu objemu použijeme vztah (57)

$$\mu_W = \frac{1}{3} \iint_{\Omega} |\Delta(\theta; v)| d\theta dv = \frac{1}{3} ab \int_0^\pi d\theta \int_0^h dv = \frac{1}{3} \pi abh.$$

Závěr:

Objem eliptického válce je roven $\frac{1}{3} \pi abh$.

3. Výpočet objemu tělesa v \mathbb{E}_n pomocí běžné a nové metody

3.1. Zadání příkladu

Vypočítejte objem tělesa, které je definované množinou

$$P := \{x \in \mathbb{E}_3 \mid z \geq 0; 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}.$$

3.2. Výpočet příkladu pomocí běžné metody

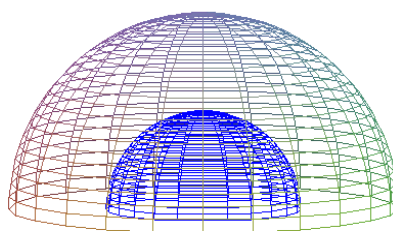
Budeme vycházet ze sférických souřadnic ze vztahu (29)

$$x = \rho \cos \varphi \sin \nu,$$

$$y = \rho \sin \varphi \sin \nu,$$

$$z = \rho \cos \nu,$$

$$\text{pro } \rho \in \langle 1; 2 \rangle, \varphi \in \langle 0; 2\pi \rangle, \nu \in \langle 0; \pi \rangle.$$



Obr. 23

Řešení:

Vypočítáme potřebné derivace

$$\begin{array}{lll} \frac{\partial x}{\partial \rho} = \cos \varphi \sin \nu, & \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -\rho \sin \varphi \sin \nu, & \frac{\partial x}{\partial \nu} = \rho \cos \varphi \sin \nu, \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} = \sin \varphi \sin \nu, & \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \rho \cos \varphi \sin \nu, & \frac{\partial y}{\partial \nu} = \rho \sin \varphi \cos \nu, \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} = \cos \nu, & \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0, & \frac{\partial z}{\partial \nu} = -\rho \sin \nu. \end{array}$$

Sestavíme a vypočítáme jakobián

$$\begin{aligned}
 J &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \rho} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial \nu} & \frac{\partial y}{\partial \nu} & \frac{\partial z}{\partial \nu} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi \sin \nu & \sin \varphi \sin \nu & \cos \nu \\ -\rho \sin \varphi \sin \nu & \rho \cos \varphi \sin \nu & 0 \\ \rho \cos \varphi \sin \nu & \rho \sin \varphi \cos \nu & -\rho \sin \nu \end{vmatrix} = \\
 &= (-1)^4 \cos \nu \begin{vmatrix} -\rho \sin \varphi \sin \nu & \rho \cos \varphi \sin \nu \\ \rho \cos \varphi \sin \nu & \rho \sin \varphi \cos \nu \end{vmatrix} + \\
 &+ (-1)^6 (-\rho \sin \nu) \begin{vmatrix} \cos \varphi \sin \nu & \sin \varphi \sin \nu \\ -\rho \sin \varphi \sin \nu & \rho \cos \varphi \sin \nu \end{vmatrix} = -\rho^2 \sin \nu.
 \end{aligned}$$

Upravíme meze na základě definované množiny P

$$\varphi \in \langle 0; 2\pi \rangle, \nu \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle.$$

Pro výpočet objemu V tělesa v \mathbf{E}_3 obecně platí v kartézských souřadnicích

$$V = \iiint_{\Omega} dV = \iiint_{\Omega} dx dy dz. \quad (58)$$

Vztah (58) upravíme pro sférické souřadnice, dosadíme a dopočítáme

$$\begin{aligned}
 V &= \iiint_{\Omega} |J| d\rho d\nu d\varphi = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_1^2 \rho^2 d\rho \right) \sin \nu d\nu \right] d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\frac{7}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \nu d\nu \right) d\varphi = \\
 &= \frac{7}{3} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{14}{3} \pi.
 \end{aligned}$$

Závěr:

Objem tělesa definovaného množinou P je $\frac{14}{3} \pi$.

3.3. Výpočet příkladu pomocí nové metody

I v této metodě budeme vycházet ze sférických souřadnic ze vztahu (29).

Vypočítáme derivace

$$\begin{aligned} B_1^1 &= \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r \sin \varphi \sin \nu, & B_2^1 &= \frac{\partial x}{\partial \nu} = r \cos \varphi \cos \nu, \\ B_1^2 &= \frac{\partial y}{\partial \varphi} = r \cos \varphi \sin \nu, & B_2^2 &= \frac{\partial y}{\partial \nu} = r \sin \varphi \cos \nu, \\ B_1^3 &= \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0, & B_2^3 &= \frac{\partial z}{\partial \nu} = -r \sin \nu. \end{aligned}$$

Determinant $\Delta(\mathbf{u})$ definovaný v (55) je roven

$$\begin{aligned} \Delta(\varphi; \nu) &= \begin{vmatrix} r \cos \varphi \sin \nu & r \sin \varphi \sin \nu & r \cos \nu \\ -r \sin \varphi \sin \nu & r \cos \varphi \sin \nu & 0 \\ r \cos \varphi \cos \nu & r \sin \varphi \cos \nu & -r \sin \nu \end{vmatrix} = \\ &= (-1)^4 r \cos \nu \begin{vmatrix} -r \sin \varphi \sin \nu & r \cos \varphi \sin \nu \\ r \cos \varphi \cos \nu & r \sin \varphi \cos \nu \end{vmatrix} + \\ &+ (-1)^6 (-r \sin \nu) \begin{vmatrix} r \cos \varphi \sin \nu & r \sin \varphi \sin \nu \\ -r \sin \varphi \sin \nu & r \cos \varphi \sin \nu \end{vmatrix} = -r^3 \sin \nu. \end{aligned}$$

Meze upravíme na základě definované množiny P

$$\varphi \in \langle 0; 2\pi \rangle, \nu \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle.$$

K výpočtu objemu použijeme vzorec (57)

$$\mu_W = \frac{1}{3} \iint_{\Omega} |\Delta(\varphi; \nu)| d\varphi d\nu = \frac{1}{3} r^3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \nu d\nu = \frac{1}{3} r^3 [\varphi]_0^{2\pi} [-\cos \nu]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3} \pi r^3.$$

Poznámka:

Ze zadání víme, že $r \in \langle 1; 2 \rangle$. Potom získáme $\mu_W = \frac{14}{3} \pi$.

Závěr:

Objem tělesa daného množinou P je roven $\frac{14}{3} \pi$.

3.4. Porovnání obou metod

Pozitivum v nové metodě jistě shlédneme ve snížení stupně integrálů, tedy např. při výpočtech obsahů omezené plochy se sníží integrál ze stupně druhého na první. U výpočtů objemů těles nepočítáme s trojným integrálem ale s dvojným. Nejen, že dojde ke snížení vícenásobných integrálů, ale sníží se i počet parciálních derivací pro výpočet determinantu.

Důležitým poznatkem je, že k použití nové metody je vždy zapotřebí parametrických rovnic.

Ve srovnávacím příkladě u běžné metody jsou užity sférické souřadnice (pro snadnější rozeznání rozdílů s novou metodou), ale lze využít i jiných způsobů výpočtů.

4. Příklady na procvičení

4.1. Příklad 1

Odvoďte vzorec pro výpočet objemu kužele, který je tvořen množinou

$$P := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbf{E}_3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \right\}, \quad a, b, c \in \mathbf{R}^+.$$

Řešení:

Použijeme parametrické rovnice kuželové plochy ze vztahu (34)

$$\begin{aligned} x &= \frac{h-u}{h} r \cos \theta, \\ y &= \frac{h-u}{h} r \sin \theta, \\ z &= u, \quad u \in \langle 0; h \rangle, \quad \theta \in \langle 0; 2\pi \rangle, \end{aligned}$$

kde h je výška kužele a r je poloměr.

Vypočítáme potřebné derivace

$$\begin{aligned} B_1^1 &= \frac{\partial x}{\partial u} = -\frac{1}{h} r \cos \theta, & B_2^1 &= \frac{\partial x}{\partial \theta} = -\frac{h-u}{h} r \sin \theta, \\ B_1^2 &= \frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{1}{h} r \sin \theta, & B_2^2 &= \frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{h-u}{h} r \cos \theta, \\ B_1^3 &= \frac{\partial z}{\partial u} = 1, & B_2^3 &= \frac{\partial z}{\partial \theta} = 0. \end{aligned}$$

Sestavíme a vypočítáme determinant $\Delta(\mathbf{u})$ na základě vztahu (55)

$$\begin{aligned} \Delta(u; \theta) &= \begin{vmatrix} \frac{h-u}{h} r \cos \theta & \frac{h-u}{h} r \sin \theta & u \\ -\frac{1}{h} r \cos \theta & -\frac{1}{h} r \sin \theta & 1 \\ -\frac{h-u}{h} r \sin \theta & \frac{h-u}{h} r \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = (-1)^4 u \begin{vmatrix} -\frac{1}{h} r \cos \theta & -\frac{1}{h} r \sin \theta \\ -\frac{h-u}{h} r \sin \theta & \frac{h-u}{h} r \cos \theta \end{vmatrix} + \\ &+ (-1)^5 \begin{vmatrix} \frac{h-u}{h} r \cos \theta & \frac{h-u}{h} r \sin \theta \\ -\frac{h-u}{h} r \sin \theta & \frac{h-u}{h} r \cos \theta \end{vmatrix} = -\frac{h-u}{h} r^2. \end{aligned}$$

Nyní vypočítáme objem kužele podle vztahu (57)

$$\mu_W = \frac{1}{3} \iint_{\Omega} |\Delta(u; \theta)| du d\theta = \frac{1}{3} \frac{r^2}{h} \int_0^h (h-u) du \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{1}{3} \frac{r^2}{h} \left[hu - \frac{u^2}{2} \right]_0^h [\theta]_0^{2\pi} = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

Závěr:

Vzorec pro výpočet objemu kužele je $\frac{1}{3} \pi r^2 h$.

4.2. Příklad 2

Vypočítejte objem eliptického paraboloidu (viz kapitola 1.4.5), který je určen množinou

$$P := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbf{E}_3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = h - z \right\}, \quad a, b, h \in \mathbf{R}^+.$$

Řešení:

Parametrické rovnice eliptického paraboloidu:

$$\begin{aligned} x &= a\sqrt{u} \cos v, \\ y &= b\sqrt{u} \sin v, \\ z &= h - u, \quad u \in \langle 0; h \rangle, v \in \langle 0; 2\pi \rangle, \\ &\text{kde } h \text{ je výška.} \end{aligned}$$

Vypočítáme potřebné derivace

$$\begin{aligned} B_1^1 &= \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{a \cos v}{2\sqrt{u}}, & B_2^1 &= \frac{\partial x}{\partial v} = -a\sqrt{u} \sin v, \\ B_1^2 &= \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{b \sin v}{2\sqrt{u}}, & B_2^2 &= \frac{\partial y}{\partial u} = b\sqrt{u} \cos v, \\ B_1^3 &= \frac{\partial z}{\partial u} = -1, & B_2^3 &= \frac{\partial z}{\partial u} = 0. \end{aligned}$$

Sestavíme determinant podle vztahu (55) a dopočítáme

$$\begin{aligned} \Delta(u; v) &= \begin{vmatrix} a\sqrt{u} \cos v & b\sqrt{u} \sin v & h - u \\ \frac{a \cos v}{2\sqrt{u}} & \frac{b \sin v}{2\sqrt{u}} & -1 \\ -a\sqrt{u} \sin v & b\sqrt{u} \cos v & 0 \end{vmatrix} = (-1)^4 (h - u) \begin{vmatrix} \frac{a \cos v}{2\sqrt{u}} & \frac{b \sin v}{2\sqrt{u}} \\ -a\sqrt{u} \sin v & b\sqrt{u} \cos v \end{vmatrix} + \\ &+ (-1)^5 (-1) \begin{vmatrix} a\sqrt{u} \cos v & b\sqrt{u} \sin v \\ -a\sqrt{u} \sin v & b\sqrt{u} \cos v \end{vmatrix} = \frac{1}{2} ab(u + h). \end{aligned}$$

K výpočtu objemu použijeme vzorec (57)

$$\mu_w = \frac{1}{3} \iint_{\Omega} |\Delta(u; v)| du dv = \frac{1}{6} ab \int_0^h (u + h) du \int_0^{2\pi} dv = \frac{1}{2} \pi ab h^2.$$

Závěr:

Objem eliptického paraboloidu je $\frac{1}{2} \pi ab h^2$.

4.3. Příklad 3

Vypočítejte objem elipsoidu (viz kapitola 1.4.4) určeného množinou

$$P := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbf{E}_3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}, \quad a, b, c \in \mathbf{R}^+.$$

Řešení:

Parametrické rovnice elipsoidu:

$$\begin{aligned} x &= a \cos \theta \sin \phi, \\ y &= b \sin \theta \sin \phi, \\ z &= c \cos \phi, \quad \theta \in \langle 0; 2\pi \rangle, \phi \in \langle 0; \pi \rangle. \end{aligned}$$

Vypočítáme derivace

$$\begin{aligned} B_1^1 &= \frac{\partial x}{\partial \theta} = -a \sin \theta \sin \phi, & B_2^1 &= \frac{\partial x}{\partial \phi} = a \cos \theta \cos \phi, \\ B_1^2 &= \frac{\partial y}{\partial \theta} = b \cos \theta \sin \phi, & B_2^2 &= \frac{\partial y}{\partial \phi} = b \sin \theta \cos \phi, \\ B_1^3 &= \frac{\partial z}{\partial \theta} = 0, & B_2^3 &= \frac{\partial z}{\partial \phi} = -c \sin \phi. \end{aligned}$$

Sestavíme a vypočítáme determinant $\Delta(\mathbf{u})$ ze vztahu (55)

$$\begin{aligned} \Delta(\theta; \phi) &= \begin{vmatrix} a \cos \theta \sin \phi & b \sin \theta \sin \phi & c \cos \phi \\ -a \sin \theta \sin \phi & b \cos \theta \sin \phi & 0 \\ a \cos \theta \cos \phi & b \sin \theta \cos \phi & -c \sin \phi \end{vmatrix} = \\ &= (-1)^4 c \cos \phi \begin{vmatrix} -a \sin \theta \sin \phi & b \cos \theta \sin \phi \\ a \cos \theta \cos \phi & b \sin \theta \cos \phi \end{vmatrix} + (-1)^6 (-c \sin \phi) \begin{vmatrix} a \cos \theta \sin \phi & b \sin \theta \sin \phi \\ -a \sin \theta \sin \phi & b \cos \theta \sin \phi \end{vmatrix} = \\ &= -abc \sin \phi. \end{aligned}$$

K výpočtu objemu použijeme vztah (57)

$$\begin{aligned} \mu_W &= \frac{1}{3} \iint_{\Omega} |\Delta(\theta; \phi)| d\theta d\phi = \frac{1}{3} abc \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin \phi d\phi = \frac{1}{3} abc [\theta]_0^{2\pi} [-\cos \phi]_0^{\pi} = \\ &= \frac{4}{3} \pi abc. \end{aligned}$$

Závěr:

Objem elipsoidu jsou $\frac{4}{3} \pi abc$.

4.4. Příklad 4

Vypočítejte objem anuloidu (viz kapitola 1.4.7), který je definovaný množinou $P := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbf{E}_3 \mid (x^2 + y^2 + z^2 - r^2 - R^2)^2 - 4R^2(r^2 - z^2) = 0 \right\}$, $R, r \in \mathbf{R}^+$.

Řešení:

Parametrické vyjádření anuloidu:

$$\begin{aligned} x &= \cos u (R + r \cos v), \\ y &= \sin u (R + r \cos v), \\ z &= r \sin v, \quad u, v \in \langle 0; 2\pi \rangle. \end{aligned}$$

Vypočítáme derivace

$$\begin{aligned} B_1^1 &= \frac{\partial x}{\partial u} = -\sin u (R + r \cos v), & B_2^1 &= \frac{\partial x}{\partial \phi} = -r \cos u \sin v, \\ B_1^2 &= \frac{\partial y}{\partial u} = \cos u (R + r \cos v), & B_2^2 &= \frac{\partial y}{\partial \phi} = -r \sin u \sin v, \\ B_1^3 &= \frac{\partial z}{\partial u} = 0, & B_2^3 &= \frac{\partial z}{\partial \phi} = r \cos v. \end{aligned}$$

Sestrojíme a vypočítáme determinant definovaný ve vztahu (55)

$$\begin{aligned} \Delta(u, v) &= \begin{vmatrix} \cos u (R + r \cos v) & \sin u (R + r \cos v) & r \sin v \\ -\sin u (R + r \cos v) & \cos u (R + r \cos v) & 0 \\ -r \cos u \sin v & -r \sin u \sin v & r \cos v \end{vmatrix} = \\ &= (-1)^4 r \sin v \begin{vmatrix} -\sin u (R + r \cos v) & \cos u (R + r \cos v) \\ -r \cos u \sin v & -r \sin u \sin v \end{vmatrix} + \\ &+ (-1)^6 r \cos v \begin{vmatrix} \cos u (R + r \cos v) & \sin u (R + r \cos v) \\ -\sin u (R + r \cos v) & \cos u (R + r \cos v) \end{vmatrix} = \\ &= r \sin v \left[r \sin^2 u \sin v (R + r \cos v) + r \cos^2 u \sin v (R + r \cos v) \right] + \\ &+ r \cos v \left[\cos^2 u (R + r \cos v)^2 + \sin^2 u (R + r \cos v)^2 \right] = \\ &= r (Rr + R^2 \cos v + r^2 \cos v + Rr \cos^2 v). \end{aligned}$$

Pro výpočet objemu použijeme vztah (57)

$$\begin{aligned} \mu_W &= \frac{1}{3} \iint_{\Omega} |\Delta(u, v)| du dv = \frac{1}{3} r \int_0^{2\pi} du \int_0^{2\pi} (Rr + R^2 \cos v + r^2 \cos v + Rr \cos^2 v) dv = \\ &= \frac{1}{3} r [u]_0^{2\pi} \left[Rrv + R^2 \sin v + r^2 \sin v + \frac{1}{2} Rrv \right]_0^{2\pi} = 2\pi^2 Rr^2. \end{aligned}$$

Poznámka:

Výpočet $\int_0^{2\pi} Rr \cos^2 \nu \, d\nu$ byl proveden pomocí vztahu

$$\int_0^{2\pi} \cos^n(cx) dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{2\pi} \cos^{n-2}(cx) dx, \quad n \geq 2.$$

Závěr:

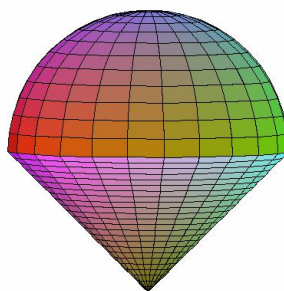
Objem anuloidu se vypočítá pomocí vztahu $2\pi^2 Rr^2$.

4.5. Příklad 5

Vypočítejte objem tělesa definovaného množinou

$$P := \{ \mathbf{x} \in \mathbf{E}_3 \mid x^2 + y^2 + z^2 - 2az = 0, x^2 + y^2 - z^2 = 0 \}, \text{ kde } a \in \mathbf{R}^+.$$

Množina P je tvořena implicitními rovnicemi kuželové a kulové plochy. Na obrázku (Obr. 24) je znázorněné těleso definované množinou P .



Obr. 24

Řešení:

Použijeme sférické souřadnice ze vztahu (29)

$$x = r \cos \varphi \sin \nu,$$

$$y = r \sin \varphi \sin \nu,$$

$$z = r \cos \nu, \quad r \in \mathbf{R}^+, \quad \varphi \in \langle 0; 2\pi \rangle, \quad \nu \in \langle 0; \pi \rangle.$$

Nalezneme meze pro vnitřní oblast tělesa, které je dáno množinou P a dostaneme

$$\varphi \in \langle 0; 2\pi \rangle,$$

$$\nu \in \left\langle 0; \frac{\pi}{4} \right\rangle.$$

Vypočítáme potřebné derivace

$$B_1^1 = \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r \sin \varphi \sin \nu,$$

$$B_2^1 = \frac{\partial x}{\partial \nu} = r \cos \varphi \cos \nu,$$

$$B_1^2 = \frac{\partial y}{\partial \varphi} = r \cos \varphi \sin \nu,$$

$$B_2^2 = \frac{\partial y}{\partial \nu} = r \sin \varphi \cos \nu,$$

$$B_1^3 = \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0,$$

$$B_2^3 = \frac{\partial z}{\partial \nu} = -r \sin \nu.$$

Determinant $\Delta(\mathbf{u})$ definovaný v (55) je roven

$$\begin{aligned}\Delta(\varphi; \nu) &= \begin{vmatrix} r \cos \varphi \sin \nu & r \sin \varphi \sin \nu & r \cos \nu \\ -r \sin \varphi \sin \nu & r \cos \varphi \sin \nu & 0 \\ r \cos \varphi \cos \nu & r \sin \varphi \cos \nu & -r \sin \nu \end{vmatrix} = \\ &= (-1)^4 r \cos \nu \begin{vmatrix} -r \sin \varphi \sin \nu & r \cos \varphi \sin \nu \\ r \cos \varphi \cos \nu & r \sin \varphi \cos \nu \end{vmatrix} + \\ &+ (-1)^6 (-r \sin \nu) \begin{vmatrix} r \cos \varphi \sin \nu & r \sin \varphi \sin \nu \\ -r \sin \varphi \sin \nu & r \cos \varphi \sin \nu \end{vmatrix} = -r^3 \sin \nu.\end{aligned}$$

K výpočtu objemu použijeme vztah (57)

$$\begin{aligned}\mu_W &= \frac{1}{3} \iint_{\Omega} |\Delta(\varphi; \nu)| d\varphi d\nu = \frac{1}{3} r^3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \nu d\nu = \frac{1}{3} r^3 [\varphi]_0^{2\pi} [-\cos \nu]_0^{\frac{\pi}{4}} = \\ &= \frac{1}{3} \pi r^3 (2 - \sqrt{2}).\end{aligned}$$

Závěr:

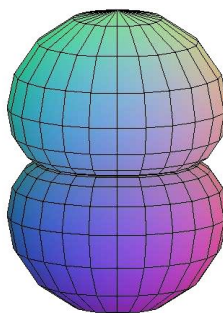
Objem tělesa definovaného množinou P je $\frac{1}{3} \pi r^3 (2 - \sqrt{2})$.

4.6. Příklad 6

Mějme těleso, které vznikne rotací křivky nazývané nefroida (viz kapitola 1.2.5). Danou křivku nechme rotovat kolem osy y . Vypočítejte objem vzniklého tělesa (Obr. 25).

Těleso vzniklé rotací kardioidy kolem osy y má tyto parametrické rovnice

$$\begin{aligned}x &= b \cos v [3 \cos t - \cos(3t)], \\y &= b \sin v [3 \cos t - \cos(3t)], \\z &= b [3 \sin t - \sin(3t)], \quad t \in \langle 0; 2\pi \rangle, v \in \langle 0; \pi \rangle.\end{aligned}$$



Obr. 25

Řešení:

Z parametrických rovnic získáme derivace

$$\begin{aligned}B_1^1 &= \frac{\partial x}{\partial t} = b \cos v [-3 \sin t + 3 \sin(3t)], & B_2^1 &= \frac{\partial x}{\partial v} = b [-3 \cos t + \cos(3t)] \sin v, \\B_1^2 &= \frac{\partial y}{\partial t} = b \sin v [-3 \sin t + 3 \sin(3t)], & B_2^2 &= \frac{\partial y}{\partial v} = b [3 \cos t - \cos(3t)] \cos v, \\B_1^3 &= \frac{\partial z}{\partial t} = b [3 \cos t - 3 \cos(3t)], & B_2^3 &= \frac{\partial z}{\partial v} = 0.\end{aligned}$$

Sestavíme a vypočítáme determinant $\Delta(\mathbf{u})$

$$\begin{aligned}\Delta(t; v) &= \begin{vmatrix} b \cos v [3 \cos t - \cos(3t)] & b \sin v [3 \cos t - \cos(3t)] & b [3 \sin t - \sin(3t)] \\ b \cos v [-3 \sin t + 3 \sin(3t)] & b \sin v [-3 \sin t + 3 \sin(3t)] & b [3 \cos t - 3 \cos(3t)] \\ b \sin v [-3 \cos t + \cos(3t)] & b \cos v [3 \cos t - \cos(3t)] & 0 \end{vmatrix} = \\&= (-1)^4 b^3 [3 \sin t - \sin(3t)] \begin{vmatrix} \cos v [-3 \sin t + 3 \sin(3t)] & \sin v [-3 \sin t + 3 \sin(3t)] \\ \sin v [-3 \cos t + \cos(3t)] & \cos v [3 \cos t - \cos(3t)] \end{vmatrix} + \\&+ (-1)^5 b^3 [3 \cos t - 3 \cos(3t)] \begin{vmatrix} \cos v [3 \cos t - \cos(3t)] & \sin v [3 \cos t - \cos(3t)] \\ \sin v [-3 \cos t + \cos(3t)] & \cos v [3 \cos t - \cos(3t)] \end{vmatrix} = \\&= 48b^3 (3 \sin^2 t \cos t - 2 \sin^2 t \cos^3 t).\end{aligned}$$

K výpočtu objemu použijeme vztah (57)

$$\begin{aligned}\mu_w &= \frac{1}{3} \iint_{\Omega} |\Delta(t, v)| dt dv = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} 48b^3 (3 \sin^2 t \cos t - 2 \sin^2 t \cos^3 t) dt \int_0^{\pi} dv = \\ &= \frac{1}{3} 48b^3 \int_0^{2\pi} (3 \sin^2 t \cos t - 2 \sin^2 t \cos^3 t) dt \int_0^{\pi} dv = \\ &= 16b^3 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3 \sin^2 t \cos t - 2 \sin^2 t \cos^3 t) dt \int_0^{\pi} dv.\end{aligned}\quad (59)$$

Pro nastávající výpočet integrálů použijeme vztahy

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(cx) \cos^m(cx) dx &= \frac{n-1}{n+m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(cx) \cos^m(cx) dx = \\ &= \frac{m-1}{n+m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(cx) \cos^{m-2}(cx) dx; \quad m, n > 1,\end{aligned}\quad (60)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^r(cx) \cos(cx) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{c(r+1)} \sin^{r+1}(cx); \quad r \neq -1. \quad (61)$$

Vztah (59) upravíme na základě vztahů (60) a (61) a dopočítáme

$$\mu_w = 64b^3 \left(3 \cdot \frac{1}{3} [\sin^3 t]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2 \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} \right) [v]_0^{\pi} = \frac{704}{15} \pi b^3.$$

Jelikož platí $b = \frac{a}{2}$, získáme $\mu_w = \frac{704}{15} \pi \frac{a^3}{8} = \frac{88}{15} \pi a^3$.

Závěr:

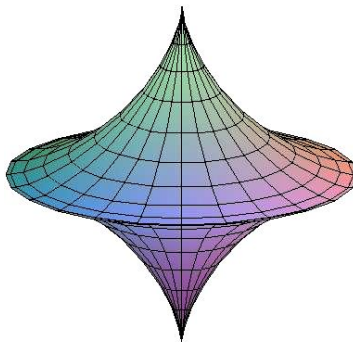
Objem tělesa vytvořeného rotací nefroidy kolem osy y činí $\frac{88}{15} \pi a^3$.

4.7. Příklad 7

Vypočítejte objem tělesa, které vznikne rotací křivky asteroidy (viz kapitola 1.2.5) kolem osy y . Vzniklé těleso je na Obr. 26.

Rovnice v parametrickém vyjádření tělesa vzniklého rotací asteroidy kolem osy y :

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{4}a \left(3 \cos \frac{\varphi}{4} + \cos \frac{3\varphi}{4} \right) \cos \nu, \\y &= \frac{1}{4}a \left(3 \cos \frac{\varphi}{4} + \cos \frac{3\varphi}{4} \right) \sin \nu, \\z &= \frac{1}{4}a \left(3 \sin \frac{\varphi}{4} - \sin \frac{3\varphi}{4} \right), \quad \varphi \in \langle 0; 2\pi \rangle, \nu \in \langle 0; \pi \rangle.\end{aligned}$$



Obr. 26

Řešení:

Z parametrických rovnic vypočítáme

$$B_1^1 = \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -\frac{3}{16}a \left(\sin \frac{\varphi}{4} + \sin \frac{3\varphi}{4} \right) \cos \nu,$$

$$B_1^2 = \frac{\partial y}{\partial \varphi} = -\frac{3}{16}a \left(\sin \frac{\varphi}{4} + \sin \frac{3\varphi}{4} \right) \sin \nu,$$

$$B_1^3 = \frac{\partial z}{\partial \varphi} = \frac{3}{16}a \left(\cos \frac{\varphi}{4} - \cos \frac{3\varphi}{4} \right),$$

$$B_2^1 = \frac{\partial x}{\partial \nu} = -\frac{1}{4}a \left(3 \cos \frac{\varphi}{4} + \cos \frac{3\varphi}{4} \right) \sin \nu,$$

$$B_2^2 = \frac{\partial y}{\partial \nu} = \frac{1}{4}a \left(3 \cos \frac{\varphi}{4} + \cos \frac{3\varphi}{4} \right) \cos \nu,$$

$$B_2^3 = \frac{\partial z}{\partial \nu} = 0.$$

Sestavíme a vypočítáme determinant $\Delta(\mathbf{u})$

$$\begin{aligned}\Delta(\varphi; \nu) &= \begin{vmatrix} \frac{1}{4}a\left(3\cos\frac{\varphi}{4} + \cos\frac{3\varphi}{4}\right)\cos\nu & \frac{1}{4}a\left(3\cos\frac{\varphi}{4} + \cos\frac{3\varphi}{4}\right)\sin\nu & \frac{1}{4}a\left(3\sin\frac{\varphi}{4} - \sin\frac{3\varphi}{4}\right) \\ -\frac{3}{16}a\left(\sin\frac{\varphi}{4} + \sin\frac{3\varphi}{4}\right)\cos\nu & -\frac{3}{16}a\left(\sin\frac{\varphi}{4} + \sin\frac{3\varphi}{4}\right)\sin\nu & \frac{3}{16}a\left(\cos\frac{\varphi}{4} - \cos\frac{3\varphi}{4}\right) \\ -\frac{1}{4}a\left(3\cos\frac{\varphi}{4} + \cos\frac{3\varphi}{4}\right)\sin\nu & \frac{1}{4}a\left(3\cos\frac{\varphi}{4} + \cos\frac{3\varphi}{4}\right)\cos\nu & 0 \end{vmatrix} = \\ &= (-1)^4 \frac{1}{4}a\left(3\sin\frac{\varphi}{4} - \sin\frac{3\varphi}{4}\right) \begin{vmatrix} -\frac{3}{16}a\left(\sin\frac{\varphi}{4} + \sin\frac{3\varphi}{4}\right)\cos\nu & -\frac{3}{16}a\left(\sin\frac{\varphi}{4} + \sin\frac{3\varphi}{4}\right)\sin\nu \\ -\frac{1}{4}a\left(3\cos\frac{\varphi}{4} + \cos\frac{3\varphi}{4}\right)\sin\nu & \frac{1}{4}a\left(3\cos\frac{\varphi}{4} + \cos\frac{3\varphi}{4}\right)\cos\nu \end{vmatrix} + \\ &+ (-1)^5 \frac{3}{16}a\left(\cos\frac{\varphi}{4} - \cos\frac{3\varphi}{4}\right) \begin{vmatrix} \frac{1}{4}a\left(3\cos\frac{\varphi}{4} + \cos\frac{3\varphi}{4}\right)\cos\nu & \frac{1}{4}a\left(3\cos\frac{\varphi}{4} + \cos\frac{3\varphi}{4}\right)\sin\nu \\ -\frac{1}{4}a\left(3\cos\frac{\varphi}{4} + \cos\frac{3\varphi}{4}\right)\sin\nu & \frac{1}{4}a\left(3\cos\frac{\varphi}{4} + \cos\frac{3\varphi}{4}\right)\cos\nu \end{vmatrix} = \\ &= -\frac{3}{4}a^3 \sin^2\frac{\varphi}{4} \cos^5\frac{\varphi}{4} = -\frac{3}{4}a^3 \left(1 - \cos^2\frac{\varphi}{4}\right) \cos^5\frac{\varphi}{4} = -\frac{3}{4}a^3 \left(\cos^5\frac{\varphi}{4} - \cos^7\frac{\varphi}{4}\right).\end{aligned}$$

K výpočtu objemu použijeme vztah (57)

$$\mu_W = \frac{1}{3} \iint_{\Omega} |\Delta(\varphi; \nu)| d\varphi d\nu = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} a^3 \int_0^{2\pi} \left(\cos^5\frac{\varphi}{4} - \cos^7\frac{\varphi}{4} \right) d\varphi \int_0^{\pi} d\nu. \quad (62)$$

Pro výpočty integrálů ve vztahu (62) použijeme vztah

$$\int_0^{2\pi} \cos^n(cx) dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{2\pi} \cos^{n-2}(cx) dx; \quad n \geq 2. \quad (63)$$

Vztah (63) aplikujeme na (62) a dopočítáme

$$\begin{aligned}\mu_W &= \frac{1}{4}a^3 \left(\int_0^{2\pi} \cos^5\frac{\varphi}{4} d\varphi - \frac{6}{7} \int_0^{2\pi} \cos^5\frac{\varphi}{4} d\varphi \right) \int_0^{\pi} d\nu = \frac{1}{4}a^3 \left(\frac{1}{7} \int_0^{2\pi} \cos^5\frac{\varphi}{4} d\varphi \right) \int_0^{\pi} d\nu = \\ &= \frac{1}{28}a^3 \left(\frac{4}{5} \int_0^{2\pi} \cos^3\frac{\varphi}{4} d\varphi \right) \int_0^{\pi} d\nu = \frac{1}{35}a^3 \left(\frac{2}{3} \int_0^{2\pi} \cos\frac{\varphi}{4} d\varphi \right) \int_0^{\pi} d\nu = \left| \begin{array}{l} \frac{\varphi}{4} = u \\ \frac{d\varphi}{4} = du \end{array} \right| = \\ &= \frac{2}{105}a^3 \cdot 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos u du \int_0^{\pi} d\nu = \frac{8}{105} \pi a^3.\end{aligned}$$

Závěr:

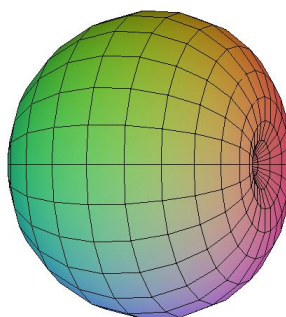
Objem tělesa je $\frac{8}{105} \pi a^3$.

4.8. Příklad 8

Mějme těleso, které vznikne rotací křivky nazvané kardioida (viz kapitola 1.2.5). Kardioidu nechme rotovat kolem osy x . Vypočítejte objem vzniklého tělesa (Obr. 27).

Těleso vzniklé rotací kardioidy kolem osy x má parametrické rovnice

$$\begin{aligned}x &= a \cos v [2 \sin t - \sin(2t)], \\y &= a \sin v [2 \sin t - \sin(2t)], \\z &= a [2 \cos t - \cos(2t)], \quad t \in \langle 0; 2\pi \rangle, \quad v \in \langle 0; \pi \rangle.\end{aligned}$$



Obr. 27

Řešení:

Vypočítáme derivace

$$B_1^1 = \frac{\partial x}{\partial t} = a \cos v [2 \cos t - 2 \cos(2t)],$$

$$B_1^2 = \frac{\partial y}{\partial t} = a \sin v [2 \cos t - 2 \cos(2t)],$$

$$B_1^3 = \frac{\partial z}{\partial t} = a [-2 \sin t + 2 \sin(2t)],$$

$$B_2^1 = \frac{\partial x}{\partial v} = -a \sin v [2 \sin t - \sin(2t)],$$

$$B_2^2 = \frac{\partial y}{\partial v} = a \cos v [2 \sin t - \sin(2t)],$$

$$B_2^3 = \frac{\partial z}{\partial v} = 0.$$

Sestavíme determinant definovaný ve vztahu (55) a vypočítáme

$$\begin{aligned}
 \Delta(t; v) &= \begin{vmatrix} a \cos v [2 \sin t - \sin(2t)] & a \sin v [2 \sin t - \sin(2t)] & a [2 \cos t - \cos(2t)] \\ a \cos v [2 \cos t - 2 \cos(2t)] & a \sin v [2 \cos t - 2 \cos(2t)] & a [-2 \sin t + 2 \sin(2t)] \\ -a \sin v [2 \sin t - \sin(2t)] & a \cos v [2 \sin t - \sin(2t)] & 0 \end{vmatrix} = \\
 &= (-1)^4 a [2 \cos t - \cos(2t)] \begin{vmatrix} a \cos v [2 \cos t - 2 \cos(2t)] & a \sin v [2 \cos t - 2 \cos(2t)] \\ -a \sin v [2 \sin t - \sin(2t)] & a \cos v [2 \sin t - \sin(2t)] \end{vmatrix} + \\
 &+ (-1)^5 a [-2 \sin t + 2 \sin(2t)] \begin{vmatrix} a \cos v [2 \sin t - \sin(2t)] & a \sin v [2 \sin t - \sin(2t)] \\ -a \sin v [2 \sin t - \sin(2t)] & a \cos v [2 \sin t - \sin(2t)] \end{vmatrix} = \\
 &= 12a^3 \sin t + 12a^3 \sin t \cos^2 t - 24a^3 \sin t \cos t = 12a^3 \sin t [1 + \cos^2 t - 2 \cos t]
 \end{aligned}$$

Nyní vypočítáme objem daného tělesa pomocí vztahu (57)

$$\begin{aligned}
 \mu_W &= \frac{1}{3} \iint_{\Omega} |\Delta(t; v)| dt dv = \frac{1}{3} 12a^3 \int_0^{2\pi} (\sin t + \sin t \cos^2 t - 2 \sin t \cos t) dt \int_0^{\pi} dv = \\
 &= 4a^3 \cdot 2 \int_0^{\pi} (\sin t + \sin t \cos^2 t - 2 \sin t \cos t) dt \int_0^{\pi} dv = \\
 &= 8a^3 \left\{ -[\cos t]_0^{\pi} - \frac{1}{3} [\cos^3 t]_0^{\pi} - 2 \frac{1}{2} [\sin^2 t]_0^{\pi} \right\} [v]_0^{\pi} = \\
 &= \frac{64}{3} \pi a^3.
 \end{aligned}$$

Závěr:

Objem tělesa vzniklého rotací kardioidy je $\frac{64}{3} \pi a^3$.

Závěr

Součástí diplomové práce je parametrizace rovinných křivek v E_2 a ploch v E_3 , kde nebylo hlavním cílem vytvořit jejich celkový přehled, ale ukázat několik příkladů, které jsou následovně užity ve výpočtech.

Novou metodu si jistě oblíbí ti, kterým dělají obtíže výpočty s vícenásobnými integrály, neboť pro usnadnění zdlouhavých výpočtů se sníží počet integrálů o jeden stupeň, tzn. že například při výpočtech obsahů omezené plochy se sníží ze stupně druhého na první a u výpočtů objemů těles se nepočítá s trojným ale s dvojným integrálem.

Nový způsob výpočtů není obtížný, tudíž by mohl být zařazen do výuky matematické analýzy na vysokých školách.

Použité zdroje

- [1] BARTSCH, H. J. *Matematické vzorce*. 3. vyd. Praha: Mladá fronta, 1996 (překlad z němčiny). 832 s. ISBN 80-204-0607-7.
- [2] WEISSTEIN, Eric W. *Wolfram MathWorld: The Web's Most Extensive Mathematics Resource* [online]. Wolfram Research, Inc., 1995, Last updated: Thu Oct 16 2008 [cit. 2008-11-02]. Text v angličtině. Dostupný z WWW: <<http://mathworld.wolfram.com/>>. ISO-8859-1.
- [3] BITTNEROVÁ, Daniela. *Volumes of bounded closed solids by using parametric descriptions*. In Proceeding of slovak-czech-polish mathematical school. Ružomberok, 2004. s. 19-24. ISBN 80-8084-004-0.
- [4] BITTNEROVÁ, Daniela. *A parametrization and a volume of a torus*. In Proceeding of ICPM'04. Liberec: Technical university of Liberec, 2004. 5 s.
- [5] POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 8. vyd. Praha: Prometheus, 2005. 608 s. ISBN 80-7196-267-8.
- [6] REKTORYS, Karel. *Přehled užití matematiky I*. 6. vyd. Praha: Prometheus, 1995. 720 s. ISBN 80-85849-92-5.
- [7] VORÁČOVÁ, Šárka. *Diferenciální geometrie* [online]. 2006 , 2. srpna 2006 [cit. 2008-11-13]. Dostupný z WWW: <<http://www.fd.cvut.cz/personal/voracova/Diffgeometry/MapleNET/index.html>>. ISO-8859-1.

Obrázky byly tvořeny v programech Malování a Maple11.